Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Программа учебной дисциплины модуля
«Специальные разделы предметной области»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Экономика

(очная форма обучения)

Составитель: Макеева О.В., к.ф-м.н., доцент
кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Стохастические динамические системы» входит в модуль «Специальные разделы предметной области» части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. Дисциплины (модули) учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Экономика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин «Динамические системы в экономике», «Теоретический и прикладной математический анализ», «Аналитическая геометрия на плоскости», «Аналитическая геометрия в пространстве», «Экономико-математические модели», «Основы математической обработки информации».

Результаты изучения дисциплины являются необходимыми для изучения дисциплин: «Теория и методика обучения математике», «Теория и методика обучения экономике» и прохождения практик: Производственная (педагогическая) Преподавательская по математике и Производственная (педагогическая) Преподавательская по экономике.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины «Стохастические динамические системы» является подготовка бакалавра к работе учителем математики и экономики в общеобразовательной школе. Дисциплина предназначена дать будущим учителям профессиональную (теоретическую и практическую) подготовку в области теории и методики обучения математике и экономике на различных ступенях общеобразовательной школы.

Задачей освоения дисциплины является формирование системы знаний, включающих методы построения и исследования учебных математических моделей детерминированных и стохастических динамических систем процессов и явлений, описываемых в различных областях научного знания с помощью дифференциальных и разностных уравнений; знакомство с элементами теории хаоса.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Стохастические динамические системы» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-12 Способен выделять структурные элементы, входящие в систему познания предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения), анализировать их в	ОР-1. Знает основные понятия теории дифференциальных уравнений ОР-3. Знает базовые типы дифференциальных уравнений первого	ОР-2. Умеет решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными ОР-4. Умеет классифицировать и решать дифференциальные	

единстве содержания, формы и выполняемых функций. ПК-12.1. Знает формулировки определений, содержательное значение терминов и понятий предметной области, правила и алгоритмы оперирования с объектами предметной области, понимает взаимосвязь между структурными элементами; имеет представление о функциях и практическом применении изучаемых объектов. ПК-12.2. Умеет выделять и анализировать структурные элементы, входящие в систему познания предметной области; определять логическую взаимосвязь между компонентами предметной области; строить логически верные и обоснованные рассуждения; решать задачи предметной области.	порядка и методы их решения ОР-5. Знает приемы решения уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка ОР-7. Знает приемы решения линейных дифференциальных уравнений высших порядков ОР-9. Знает методы решения систем дифференциальных уравнений	уравнения первого порядка ОР-6. Умеет классифицировать и решать уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка ОР-8. Умеет классифицировать и решать линейные дифференциальные уравнения высших порядков ОР-10. Умеет классифицировать и решать простейшие системы дифференциальных уравнений	

ПК-14 Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями. ПК-14.1. Знает роль и возможности применения аппарата предметной области в смежных научных областях, их методологическое и мировоззренческое значение; имеет представление о междисциплинарных связях, научных методах смежных областей ПК-14.2. Умеет определять роль полученных знаний для смежных областей и для школьного курса, применять полученные знания в решении прикладных задач.	ОР-11 Имеет представления о дифференциальных уравнениях как моделях динамических систем	ОР-12. Умеет составлять и исследовать простейшие математические модели динамических систем на основе дифференциальных уравнений	

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					

9	3	108	18	30	-	33	экзамен (27)
Итого:	3	108	18	30	-	33	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ п/п	Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
9 семестр					
1.	Дифференциальные и разностные уравнения как модели динамических систем	4	8	–	8
2.	Моделирование колебательных систем	4	8	–	8
3.	Моделирование детерминированного хаоса	6	6	–	9
4.	Моделирование биологических систем	4	8		8
	Итого	**18**	**30**	**–**	**33**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Раздел 1. Дифференциальные и разностные уравнения как модели динамических систем

Понятие динамической системы. Динамические системы в различных областях естествознания. Классификация динамических систем (дискретные / непрерывные, детерминированные / случайные). Понимание динамической системы как её математической модели; использование различных математических моделей при описании одной и той же динамической системы.

Моделирование динамических систем с помощью дифференциального уравнения. Понятие о разностных уравнениях. Моделирование динамической системы с помощью разностного уравнения. Сопоставление непрерывной и дискретной модели одной и той же динамической системы.

Интерактивная форма: Дискуссионный клуб «Моделирование процессов с помощью дифференциальных и разностных уравнений».

Раздел 2. Моделирование колебательных систем

Моделирование динамических систем с помощью дифференциальных уравнений и их систем. Кинематическая интерпретация дифференциальных уравнений: понятие о фазовых портретах динамических систем.

Колебательные системы их виды (точечные системы; линейные и нелинейные системы; консервативные и неконсервативные системы; автономные системы). Фазовые портреты колебательных систем (точечный осциллятор; линейный осциллятор с затуханием). Автоколебания: понятие о предельном цикле. Регулярные аттракторы.

Интерактивная форма: Заседание конструкторского бюро «Моделирование процессов с помощью дифференциальных уравнений».

Раздел 3. Моделирование детерминированного хаоса

Качественный анализ динамических систем. Положение равновесия и типы его устойчивости. Устойчивость и неустойчивость динамической системы. Нелинейность динамической системы. Неустойчивость и нелинейное ограничение динамической системы. Детерминированность и хаос. Детерминированный хаос. Перемешивание. Вероятностные свойства динамической системы. Странные аттракторы.

Линейный анализ устойчивости динамических систем. Бифуркации динамических систем. «Жесткие» и «мягкие» бифуркации; катастрофы.

Интерактивная форма: Круглый стол «Детерминированный хаос: математическая экзотика или типичное свойство материального мира?»

Раздел 4. Моделирование биологических систем

Моделирование поведения биологических систем как иллюстрация моделирования стохастической динамики. Модели роста численности изолированной популяции. Модель популяционной вспышки насекомых. Математические модели рыболовства. Модели качественные и количественные. Принципы построения математических моделей биологических систем. Переход к безразмерным переменным в математических моделях.

Интерактивная форма: Учебная конференция «Стохастическая динамика биологических систем».

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа

студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме подготовки к устным выступлениям (докладам по теме реферата).

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-1 Самостоятельная работа

1. Используя аппарат дифференциальных уравнений, постройте математическую модель задачи. Проведите её классификацию. Исследуйте модель и предложите её возможные обобщения.

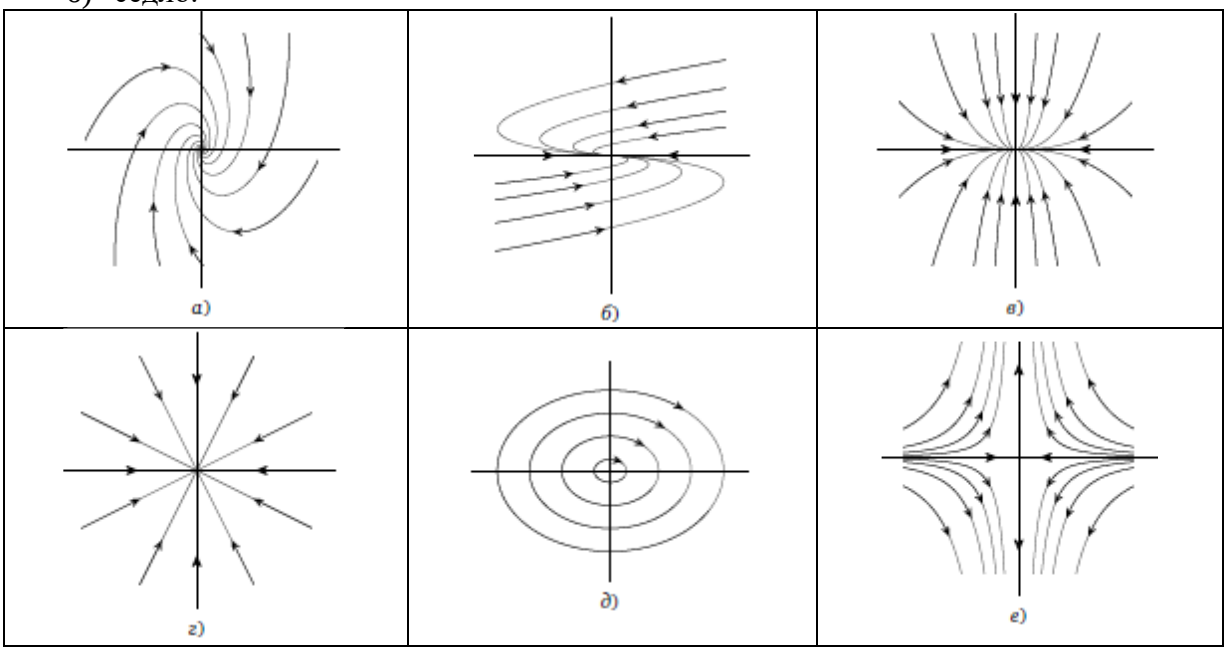
   Скорость остывания воды в чайнике пропорциональна разности температуры чайника (T) и температуры кухни (20 C°). Чайник выключился в 10.20 при температуре воды 100C°. В 10.30 температура воды в чайнике была 80 C°. Выясните, когда температура воды в чайнике будет равна 40 C°.
2. Используя аппарат разностных уравнений, постройте математическую модель задачи. Проведите её классификацию. Исследуйте модель и предложите её возможные обобщения.

   Ежегодно весной в озеро выпускают 100 рыб до тех пор, пока количество рыб не достигнет 2000. Сама популяция рыб развивается с темпом 50% в год. Сколько лет понадобиться для достижения цели?
3. Постройте модель радиоактивного распада вещества, используя аппарат дифференциальных и разностных уравнений. Сопоставьте полученные модели.
4. Используя аппарат дифференциальных уравнений, постройте и исследуйте математическую модель задачи. Проиллюстрируйте полученное решение частными примерами и графическими изображениями *линии погони*.

   Хозяин собаки стоит на перекрёстке двух взаимно перпендикулярных дорог, а его собака – на одной из дорог на расстоянии a от хозяина. Хозяин начинает движение по другой дороге со скорость v, а собака устремляется к нему со скоростью 2v, которая в каждый момент времени направлена по прямой, соединяющей её мгновенное положение с мгновенным положением хозяина. Найдите уравнение кривой, по которой будет двигаться собака (она называется *линия погони*).

ОС-2 Самостоятельная работа

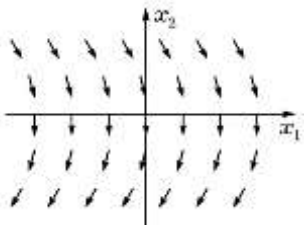
1. Установите соответствие между фазовым портретом линейной системы и его названием.
   1) фокус;
   2) вырожденный узел;
   3) узел;
   4) дикритический узел;
   5) центр;
   6) седло.



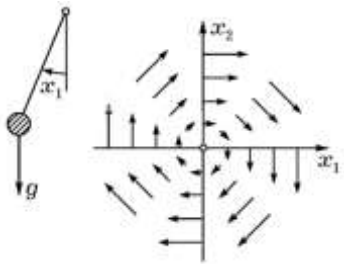
Ответ: 1-а; 2-б; 3-в; 4-г; 5-д; 6-е.

2. Найдите уравнение логистической кривой: $x' = (1-x)x$, где $x = x(t)$ - численность популяции в условиях конкуренции. Докажите, что интегральные кривые уравнения при $x > 1$ имеют горизонтальную асимптоту $x = 1$ при $t \to \infty$ и вертикальные асимптоты $t = const$. решение сопроводите иллюстрацией.

3. Ускорение свободно падающих вблизи Земли тел постоянно, и если $x = x(t)$ - высота тела, то уравнение свободного падения имеет вид $x'' = -g$. На фазовой плоскости с координатами $x_1 = x$, $x_2 = x'$ возникает векторное поле фазовой скорости $\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -g. \end{cases}$ Его графическая иллюстрация имеет вид, представленный на рисунке. Докажите, что фазовые кривые – параболы.



4. Уравнение малых колебаний имеет вид $x'' = -kx$ при соответствующем выборе масштаба времени можно привести к виду $x'' = -x$, где $x = x(t)$ - угол отклонения тела от положения равновесия. На фазовой плоскости с координатами $x_1 = x$, $x_2 = x'$ возникает векторное поле фазовой скорости $\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1. \end{cases}$ Его графическая иллюстрация имеет вид, представленный на рисунке. Докажите, что фазовые кривые – окружности. Докажите, что фазовая точка движется по окружности с постоянной угловой скоростью, равной 1. Найдите частное решение с начальным условием $x(0) = a$, $x'(0) = b$.



ОС-3 Самостоятельная работа

Выберите одну из математических моделей детерминированного хаоса:

1) отображение «зуб пилы»;
2) логистическое отображение;
3) отображение «тент»;
4) отображение пекаря;
5) отображение «кот Арнольда».

Ознакомьтесь с математической моделью отображения. Проделайте две первых итерации. Поясните идею детерминированного хаоса, возникающего при этом отображении.

ОС-4 Итоговая контрольная работа / реферат

Разработайте презентацию научно-популярного сообщения по направлению «Современные математические исследования и их приложения» на основе видео - материалов «Хаос. Математическое приключение»:

1. Движение и детерминизм.
2. Векторные поля.
3. Колебания.
4. Бильярды.
5. Хаос и подкова Смейла.
6. Странные аттракторы и эффект бабочки.
7. Мельница Лоренца.

Примерный перечень тем рефератов

1. Семья Бернулли и дифференциальные уравнения.
2. Решение дифференциальных уравнений при помощи рядов.
3. Кривые, связанные с движением точки или тела на плоскости/в пространстве (экспоненциальная кривая, парабола Нейля, цепная линия, трактриса).
4. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений.
5. Применение теоремы Банаха о сжимающем отображении к решению дифференциальных уравнений и их систем.
6. Дифференциальные уравнения как средство изучения колебательных явлений.
7. Приложения дифференциальных уравнений в задачах естествознания (задача о кривой наискорейшего спуска, задача о провисании цепной линии, модель Вольтерра «хищник-жертва»).
8. Линейные дифференциальные операторы и их приложения.
9. Дискретные и непрерывные динамические модели.
10. Автоколебания.
11. Регулярные аттракторы.
12. Устойчивые и неустойчивые динамические системы.
13. Нелинейные динамической системы.
14. Детерминированный хаос.
15. Вероятностные свойства динамической системы.
16. Странные аттракторы.
17. Бифуркации динамических систем.
18. «Жесткие» и «мягкие» бифуркации. Катастрофы.

ОС-5 Учебная конференция

Участие в обсуждении особенностей стохастической динамики на примере математических моделей биологических систем.

1. Модель роста численности изолированной популяции.
2. Модель популяционной вспышки насекомых.
3. Математические модели рыболовства.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: материалы самостоятельных работ, итоговой контрольной работы / реферата. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических занятиях.

№ п /п	РАЗДЕЛЫ (ТЕМЫ) ДИСЦИПЛИНЫ	СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ, используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Показатели формирования компетенции (ОР)					
			1	2	3	4	5	6
1.	Дифференциальные и разностные уравнения как модели динамических систем	ОС-1 Самостоятельная работа	+	+	+			
2.	Моделирование колебательных систем	ОС-2 Самостоятельная работа					+	+
3.	Моделирование детерминированного хаоса	ОС-3 Самостоятельная работа			+	+	+	+
4.	Все разделы	ОС-4 Итоговая контрольная работа / реферат	+	+	+	+	+	+
5.	Все разделы	ОС-5 Учебная конференция	+	+	+	+	+	+
6.	Промежуточная аттестация	ОС-6 Экзамен						

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине «Стохастические динамические системы».

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-6 Экзамен в форме устного собеседования

Программа экзамена

Раздел 1. Основные понятия

1. Понятие динамической системы.
2. Классификация динамических систем.
3. Этапы построения математической модели.
4. Моделирование динамических систем с помощью дифференциального уравнения. Пример.
5. Моделирование динамической системы с помощью разностного уравнения. Пример.

Раздел 2. Моделирование колебательных систем

6. Интерпретация системы дифференциальных уравнений как динамической системы.
7. Кинематическая интерпретация дифференциальных уравнений.
8. Колебательные системы их виды. Примеры.
9. Фазовые портреты колебательных систем (точечный осциллятор; линейный осциллятор с затуханием).
10. Автоколебания. Предельный цикл.
11. Регулярные аттракторы.

Раздел 3. Моделирование детерминированного хаоса

12. Устойчивость и неустойчивость динамической системы.
13. Нелинейность динамической системы.
14. Детерминированный хаос.
15. Вероятностные свойства динамической системы.
16. Странные аттракторы.
17. Бифуркации динамических систем.
18. «Жесткие» и «мягкие» бифуркации. Катастрофы.

Раздел 4. Моделирование биологических систем

19. Моделирование поведения биологических систем.
20. Принципы построения математических моделей динамических систем.
21. Модели роста численности изолированной популяции.
22. Модель популяционной вспышки насекомых.
23. Математические модели рыболовства.
24. Переход к безразмерным переменным в математических моделях.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования баллов, набранных в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен	Итоговая сумма баллов
$1\times9=9$	$1\times15=15$	212	64	300

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Результат	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300 баллов
«хорошо»	211-270 баллов
«удовлетворительно»	151-210 баллов
«неудовлетворительно»	0-150 баллов

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

Занятие 1-2. Дифференциальные и разностные уравнения как модели динамических систем

Материал для освоения

1 Алгоритм построения математической модели.
2 Понимание динамической системы как её математической модели.
3 Использование различных математических моделей при описании одной и той же динамической системы: сопоставление разностного и дифференциального уравнения на примере задачи об падении стоимости оборудования в связи с его износом.

Занятие 3-4. Дифференциальные и разностные уравнения как модели динамических систем

Материал для освоения

1 Построение и исследование моделей динамических систем.
2 Классификация инструментов исследования динамических систем.
3 Начальные и краевые условия в математических моделях.

Занятие 5-6. Фазовые портреты динамических систем

Материал для освоения

1 Кинематическая интерпретация дифференциальных уравнений.
2 Понятие о фазовых портретах динамических систем.
3 Классификация фазовых портретов.
4 Построение фазовых портретов динамических систем.

Занятие 7-8. Моделирование колебательных систем

Материал для освоения

1. Колебательные системы их виды (точечные системы; линейные и нелинейные системы; консервативные и неконсервативные системы; автономные системы).
2. Фазовые портреты колебательных систем (точечный осциллятор; линейный осциллятор с затуханием).
3. Автоколебания: понятие о предельном цикле.
4. Регулярные аттракторы.

Занятие 9. Качественный анализ динамических систем

Материал для освоения

1 Положение равновесия и типы его устойчивости.
2 Устойчивость и неустойчивость динамической системы.
3 Нелинейность динамической системы.
4 Неустойчивость и нелинейное ограничение динамической системы.

Занятие 10-11. Моделирование детерминированного хаоса

Материал для освоения

1 Детерминированность и хаос.
2 Детерминированный хаос.
3 Перемешивание.
4 Вероятностные свойства динамической системы.
5 Странные аттракторы.
6 Линейный анализ устойчивости динамических систем.
7 Бифуркации динамических систем.
8 «Жесткие» и «мягкие» бифуркации; катастрофы.

Занятие 12-14. Моделирование биологических систем.

Материал для освоения

1 Моделирование поведения биологических систем как иллюстрация моделирования стохастической динамики.
2 Модели роста численности изолированной популяции.
3 Модель популяционной вспышки насекомых.
4 Математические модели рыболовства.
5 Модели качественные и количественные.
6 Принципы построения математических моделей биологических систем.
7 Переход к безразмерным переменным в математических моделях.

Занятие 15. Итоговая контрольная работа.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Асташова, И.В. Практикум по курсу «Дифференциальные уравнения» [Электронный ресурс]: учебное пособие / И.В. Асташова, В.А. Никишкин. - М. : Евразийский открытый институт, 2011. - 96 с.
   URL: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90289
2. Братусь, А.С. Динамические системы и модели биологии : учебное пособие / А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов. – Москва : Физматлит, 2009. – 400с.
   URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=67304
3. Курс высшей математики для экономистов : учебник / под ред. Р.В. Сагитова. — Москва : ИНФРА-М, 2019. — 647 с.
   URL: https://znanium.com/catalog/product/989794
4. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики. / А.Н. Тихонов; А.А. Самарский. – Изд. 5-е, стереотип. – Москва: Наука, 1977. – 734 с.
   URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468275

Дополнительная литература

1. Барашков, В. А. Методы математической физики [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. А. Барашков. - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012. - 152 с.
   URL: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=492290
2. Общий курс высшей математики для экономистов : учебник / под общ. ред. В.И. Ермакова. — Москва : ИНФРА-М, 2010. — 656 с.
   URL: https://znanium.com/catalog/product/210735
3. Пантелеева, А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс : учебное пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова, К. А. Рыбаков. - Москва : 2020. - 384 с.
   URL: https://znanium.com/catalog/document?id=367482
4. Рыбаков, К.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Практический курс; учебное пособие / К. А. Рыбаков, А. С. Якимова, А. В. Пантелеев– Москва: Логос, 2010. – 384 с. (Новая университетская библиотека).
   URL:http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=84753

Интернет-ресурсы

1. Хаос. Математическое приключение (научно - популярное видео в 9 главах).

URL: http://www.chaos-math.org/ru
2. Анищенко В.С. Детерминированный хаос // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – №6. – С. 70-76.
URL: http://www.nehudlit.ru/journals/detail8505.html
3. Анищенко В.С. Динамические системы // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – №11. – С. 77-84.
URL: http://www.nehudlit.ru/journals/detail8505.html
4. Анищенко В.С. Устойчивость, бифуркации, катастрофы // Соросовский образовательный журнал. – 2000. – №6. – С. 105-109.
URL: http://www.nehudlit.ru/journals/detail8541.html
5. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М.: МЦНМО, 2004. – 32 с.
URL: http://www.mcnmo.ru/edu/?ikey=viarn-models