Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов

ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭКОНОМИКЕ

Программа учебной дисциплины модуля
«Специальные разделы предметной области»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Экономика

(очная форма обучения)

Составитель: Глухова Н.В.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Прикладные вопросы линейной алгебры в экономике» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1. Дисциплины (модули) модуля «Специальные разделы предметной области» учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Экономика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин Алгебра и теория чисел, Теоретический и прикладной математический анализ, Числовые системы.

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин: Экономический анализ систем массового обслуживания, Оптимизационные методы в предпринимательстве, Математические методы в управлении и менеджменте, Теория игр в риск-менеджменте, и для прохождения государственной итоговой аттестации.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины подготовка учителя к преподаванию предметов «математика» и «экономика» как в общеобразовательных классах, так и в классах с углубленным изучением математики, а также с одаренными детьми.

Задачей освоения дисциплины является закрепление умений решать задачи повышенного уровня сложности школьного курса математики, умения логически грамотно рассуждать, строить строгие математические доказательства, формирование представлений о междисциплинарных связях.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	Знает	умеет	владеет
ПК-12 - Способен выделять структурные элементы, входящие в систему познания предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения), анализировать их в единстве содержания, формы и выполняемых функций.			
ПК-12.1. Знает формулировки	ОР-1. Основные понятия	ОР-2 Решать задачи по	

определений, содержательное значение терминов и понятий предметной области, правила и алгоритмы оперирования с объектами предметной области, понимает взаимосвязь между структурными элементами; имеет представление о функциях и практическом применении изучаемых объектов. ПК-12.2. Умеет выделять и анализировать структурные элементы, входящие в систему познания предметной области; определять логическую взаимосвязь между компонентами предметной области; строить логически верные и обоснованные рассуждения; решать задачи предметной области.	дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач	дисциплине, проводить доказательства, классифицировать и систематизировать основные изучаемые объекты, строить логически верные рассуждения	
ПК-14. Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями ИПК-14.1. Знает роль и возможности применения	ОР-3. возможности применения полученных	ОР-4. решать задачи школьного курса математики	

аппарата предметной области в смежных научных областях, их методологическое и мировоззренческое значение; имеет представление о междисциплинарных связях, научных методах смежных областей ИПК-14.2. Умеет определять роль полученных знаний для смежных областей и для школьного курса, применять полученные знания в решении прикладных задач.	сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях	повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине	

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
3	3	108	18	30	-	33	экзамен (27)
Итого:	3	108	18	30	-	33	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения

	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
3 семестр				
Экономические задачи, приводящие к составлению систем линейных уравнений и неравенств	2	4	-	10
Линейное программирование в экономике.	6	12	-	10
Динамическое программирование в экономике	4	6	-	7
Анализ рентабельности предприятий. Модель Леонтьева. Линейные методы в принятии решений.	6	8	-	6
Экзамен	-	-	-	27
Всего по дисциплине:	**18**	**30**	**-**	**60**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

1. Экономические задачи, приводящие к составлению систем линейных уравнений и неравенств

Примеры экономических задач на оптимизацию с ограничениями в виде равенств и неравенств. Построение математической модели и определение целевой функции. Интерактивная форма – урок дискуссия. Транспортная задача, задача об оптимальном назначении. Задача рационального использования ресурсов. Линейное и нелинейное программирование.

2. Линейное программирование в экономике

Графические методы решения экономических задач. Анализ моделей на чувствительность. Графоаналитический метод решения задач линейного программирования. Анализ чувствительности модели к изменениям ограничений. Теневые стоимости. Графический метод решения задач дискретного программирования. Симплекс-метод, двойственные задачи. Интерактивная форма: решение задач линейного программирования с помощью компьютерных программ

3. Динамическое программирование в решении экономических задач

Цели и задачи динамического программирования. Основные этапы решения методом динамического программирования. Идея обратной прогонки, принцип оптимальности Беллмана. Примеры применения динамического программирования к задаче о нахождении кратчайшего пути, об оптимальном инвестировании. Урок – деловая игра. Принятие решения об оптимальном инвестировании.

4. Анализ рентабельности предприятий. Модель Леонтьева. Линейные методы в принятии решений

Матричные и операторные модели многоотраслевой экономики. Модель Леонтьева. Сведение моделей к матричным (операторным) уравнениям и их решение. Применение собственных значений к анализу рентабельности производства. Балансовые модели. Собственные векторы в балансовых моделях. Линейные методы в принятии решений. Границы Парето, графический метод в принятии решений. Интерактивная форма: Урок соревнование.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:
- подготовки к устным докладам;
- подготовка к защите проекта;
- решение задач по дисиплине.

ОС-1. Самостоятельная работа

Составьте математическую модель задачи (максимально 12 баллов)

Вариант 1.

В фирме работает 120 сотрудников высшей квалификации и 180 неквалифицированных сотрудников. Фирма выполняет 3 проекта, на первый из которых требуется 70 работников, на второй 140, на третий 90. Первый проект не требует высокой квалификации, поэтому при выполнении данного заказа рабочему любой квалификации нам потребуется оплатить 40 рабочих часов. Второй и третий проект квалифицированные рабочие выполнят гораздо быстрее, чем неквалифицированные: при выполнении второго проекта нам придётся оплачивать 25 часов каждому квалифицированному рабочему и 90

часов – неквалифицированному. При выполнении третьего проекта нам придётся оплачивать 30 часов каждому квалифицированному и 70 часов каждому неквалифицированному рабочему. Составить оптимальный план назначений, позволяющий минимизировать расходы на зарплату, если зарплата квалифицированного рабочего составляет 200 рублей в час, а неквалифицированного – 100 рублей в час. Сколько составят минимальные расходы на зарплату при выполнении данных проектов?

ОС-2. Групповое интерактивное задание.

Студенты разбиваются на микрогруппы по 3-4 человека в зависимости от количества студентов в группе, и получают задание разработать план-конспект просветительского или развлекательного мероприятия по тематике динамического программирования (максимально 12 баллов)

Примерные темы:

1. Динамическое программирование в решении кадровых задач
2. Динамическое программирование в инвестировании
3. Динамическое программирование в задаче о замене оборудования
4. Динамическое программирование в задаче о загрузке транспортного средства

- Составлен план-конспект мероприятия, включающий задачу динамического программирования по теме (8 баллов)
- Самостоятельно найден дополнительный материал по теме, составлена презентация (дополнительно 1-4 баллов)

ОС-3. Контрольная работа

Примерный вариант:

1. В таблице указан доход, который приносят предприятия при инвестировании в них сумм, указанных в левом столбце:

Объём капиталовложений (тыс. руб.)	Доход (тыс. руб.)		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
25	11	15	13
50	32	29	38
75	43	38	48
100	64	57	62

Имеется капитал в 100 тысяч рублей. Составьте оптимальный план распределения капиталовложений между тремя предприятиями, при котором будет достигнут максимальный доход

2. В организации социальной помощи работает 120 сотрудников высшей квалификации и 180 неквалифицированных сотрудников. Фирма выполняет 3 проекта, на первый из которых требуется 70 работников, на второй 140, на третий 90. Первый проект не требует высокой квалификации, поэтому при выполнении данного заказа рабочему любой квалификации нам потребуется оплатить 40 рабочих часов. Второй и третий проект квалифицированные рабочие выполнят гораздо быстрее, чем неквалифицированные: при выполнении второго проекта нам придётся оплачивать 25 часов каждому квалифицированному рабочему и 90 часов – неквалифицированному. При выполнении третьего проекта нам придётся оплачивать 30 часов каждому квалифицированному и 70 часов каждому неквалифицированному рабочему. Составить оптимальный план назначений, позволяющий минимизировать расходы на зарплату, если зарплата квалифицированного рабочего составляет 200 рублей в час, а неквалифицированного – 100 рублей в час. Сколько составят минимальные расходы на зарплату при выполнении данных проектов?

ОС-4. Индивидуальное творческое задание

Разработать программу элективного курса по прикладным вопросам алгебры в экономике.

Примерные темы

1. Задачи нелинейного программирования в управлении персоналом
2. Квадратичное программирование. Понятие о квадратичных и билинейных формах.
3. Положительно-определённые квадратичные формы, угловые миноры и способ Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду. Определение максимумов и минимумов с помощью матриц Якоби.
4. Линейные операторы в экономике
5. Применение собственных значений к оценке рентабельности производства
6. Методы динамического программирования в решении задачи о замене оборудования
7. Сетевое планирование и составление расписаний.
8. Теория игр в управлении кадрами.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Глухова Н.В., Череватенко О.И. Линейное программирование в управлении персоналом: учебное пособие для направления подготовки бакалавров 080400.62. – Ульяновск, УлГПУ, 2013. – 70 с.
2. Исследование операций и математические модели в экономике. Лабораторные работы для студентов специальности «Управление персоналом»: учебно-методическое пособие / составитель Н.В. Глухова. – Ульяновск: УлГПУ, 2009. – 44 с.
3. Глухова Н.В. Методы оптимизации использования трудовых ресурсов. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2017. – 50 с.
4. Глухова Н.В. Теория принятия решений: учебное пособие. / Глухова Н.В. – Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017. – 48 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Самостоятельная работа ОС-2. Интерактивное задание. Деловая игра. ОС-3. Контрольная работа ОС-4. Индивидуальное творческое задание	ОР-1. Знает оновные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач ОР-2. Решает задачи по дисциплине, проводить доказательства, классифицировать и систематизировать основные изучаемые объекты, строить логически верные рассуждения ОР-3. знает возможности применения полученных сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях ОР-4. умеет решать задачи школьного курса математики повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-5. Экзамен в форме устного собеседования	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-5. Экзамен в форме устного собеседования

Перечень вопросов к экзамену

1. Построение математических моделей при решении экономических задач. Определение целевой функции.
2. Задача оптимизации использования сырья.
3. Транспортная задача и методы её решения.
4. Графический метод решения задач оптимизации.
5. Симплекс-метод при решении задач оптимизации.
6. Метод искусственного базиса в решении линейных задач оптимизации.
7. Двойственные задачи линейного программирования
8. Теневые цены.
9. Экономические и управленческие задачи, требующие целочисленности решений.
10. Полностью и частично целочисленные задачи.

11. Метод Гомори (отсекающих плоскостей).
12. Метод ветвей и границ.
13. Цели и задачи динамического программирования.
14. Основные этапы решения методом динамического программирования. Идея обратной прогонки.
15. Принцип оптимальности Беллмана в динамическом программировании.
16. Применение динамического программирования к задаче о нахождении кратчайшего пути.
17. Применение динамического программирования к задаче об оптимальном инвестировании.
18. Применение линейных операторов к анализу рентабельности. Модель Леонтьева.
19. Балансовые уравнения и собственные векторы.
20. Оптимизация по нескольким критериям. Метод Парето.
21. Линейные операторы в решении многокритериальных задач.
22. Иерархии и приоритеты.
23. Метод Парето в принятии решений
24. Решение задач принятия решений графическим методом.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачёт
3 семестр	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	9 баллов max	24 балла max	236 баллов Max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного

количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

ЗАНЯТИЕ № 1. Задачи линейного программирования (ЗЛП)

1. Составить математические модели следующих задач линейного программирования.

1.1. Фирма выпускает два вида продукта в день. Производственный процесс составляет 430 минут в день (5 десятиминутных перерывов при восьми часовом рабочем дне). Для изготовления единицы продукта первого вида требуется одна минута, а единицы второго – две минуты. Продукции первого вида требуется не более 300 единиц в день, а второго – не более 230 единиц в день. Реализация единицы продукции первого вида приносит 2 доллара чистой прибыли, а второго – 3 доллара. Каков оптимальный производства, максимизирующий прибыль, чему равна максимальная прибыль?

1.2. В первой передаче имеется 18 минут рекламного времени, а во второй – 12 минут. Фирма имеет рекламные ролики трёх видов, и на основании анализа рынка считает, что 13 минут времени должно быть отведено для демонстрации роликов, рассчитанных на домохозяек, 7 минут – для демонстрации роликов, рассчитанных на молодёжь, и 10 минут – для демонстрации роликов, рассчитанных на бизнесменов. Известны рейтинги передач: первую передачу смотрят среди всех домохозяек 60 %, среди молодёжи – 50 %, среди бизнесменов – 30 %; для второй передачи соответствующие рейтинги составляют 40, 70 и 20 %. Распределите время показа рекламных роликов между передачами с целью максимизации времени просмотра целевой аудиторией.

Ответ: Ролик для домохозяек все 13 минут показывать в первой передаче, ролик для молодёжи –все 7 минут во второй передаче. Ролик для бизнесменов показывать по 5 минут в каждой передаче.

1.3. Фирма может выполнять работы двух типов. Для выполнения одного заказа первого типа требуется один инженер, 16 рабочих и 9 технологов, а для выполнения одного заказа второго типа – 2 инженера, 6 рабочих и 7 технологов. Выполнение одного заказа первого типа приносит чистую прибыль в 5 тыс. руб., а второго – в 7 тыс. руб. Фирма дала объявление о найме на работу и получила 15 заявлений от инженера, 96 – от рабочих, 69 – от технологов. Какое количество заказов первого и второго типа требуется взять фирме для максимизации прибыли? Какое количество сотрудников следует нанять? Чему равна максимально возможная прибыль?

1.4. (Д/з) На заводе есть два корпуса и три пункта аварийной эвакуации. Время на переход из первого корпуса к первому пункту эвакуации составляет 3 минуты, ко второму – 4 минуты, к третьему 2,5 минуты. Для второго корпуса соответствующие временные затраты составляют 4,5 минуты, 6,5 минут и 3,5 минуты. В первом корпусе работают 600 человек, во втором – 900. Первый пункт может принять 600 человек, второй – 500 человек, третий – 400 человек. Составить оптимальный план эвакуации, минимизирующий суммарное время, необходимое, чтобы все сотрудники добрались до пунктов эвакуации

Ответ: 200 сотрудников из первого корпуса направляются в первый пункт, 400 направляются в третий пункт, из второго корпуса 400 человек направляется в первый пункт и 500 во второй.

1.5 (Д/з) Фирма выпускает два вида изделий. Для изготовления одного изделия первого вида требуется 2 кг металла, а второго вида – 4 кг металла. Изделие первого вида может быть продано по цене 30 тыс. рублей за единицу, а второго – по цене 20 тысяч рублей за единицу, причём первого изделия можно реализовать не более 40 единиц, а второго не более 20. Всего имеется 100 кг металла. Каков оптимальный план производства, максимизирующий доход от продажи данных изделий, чему равна максимальная прибыль доход?

Ответ: 40 изделий первого вида и 5 изделий второго вида принесут доход в 1 мил.300 тыс. рублей.

ЗАНЯТИЕ № 2. Переход в системах ограничений от равенств к неравенствам и обратно

№ 1. Приведите систему ограничений ЗЛП ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) к системе ограничений в виде равенств:

а) $-2x_1 + x_2 \leq 1$;
$-x_1 + x_2 \leq 2$
$3x_1 + x_2 \leq 8$
$-2x_1 + 3x_2 \geq -9$
$4x_1 + 3x_2 \geq 0$.

б) $2x_1 - x_2 + x_3 = 2$
$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$
$x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$
$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1$;

в) (д/з) $0 \leq 2x_1 + x_2 \leq 1$
$-x_1 + 3x_2 \leq 2$
$-x_1 + x_2 \geq -4$;

г) (д/з) $x_1 \leq 1$
$x_2 \leq 2$
$x_1 + x_2 \leq 3$
$-1 \leq x_1 - x_2 \leq 0$.

№ 2. Приведите систему ограничений ЗЛП ($x_i \geq 0$) к системе ограничений в виде равенств:

а) $\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 - x_6 = 1 \\ x_2 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 - 3x_6 = 3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$ Отв. $2 + x_2 \geq 0$, $3 + x_2 - 2x_4 \geq 0$.

в) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$ Отв. $7x_2 - 4x_3 - 2x_4 \geq 0$, $-9x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq 0$

г) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 14x_4 = 0 \\ 10x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$ Отв. $\frac{3}{2}x_2 + \frac{11}{8}x_4 \geq 0$, $-\frac{9}{4}x_4 \geq 0$

ЗАНЯТИЕ № 3. Решение задач линейного программирования графическим методом

1. Найти максимальное и минимальное значение целевой функции F при заданной системе ограничений графоаналитическим методом. Указать значения x_1, x_2, … ($x_i \geq 0$) при которых достигаются максимальное и минимальное значение.

а) $F = x_1 + 3x_2$

Система ограничений:

$x_1 + 4x_2 \geq 4$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_2 \leq 2$.

Ответ: Максимум 10 в точке (4, 2), минимум 3 в точке (0, 1).

б) $F = x_2 - x_1$

Система ограничений:

$2x_1 - x_2 + x_3 = 4$

$x_1 - 2x_2 - x_4 = 2$

$x_1 + x_2 + x_5 = 5$.

Ответ: минимум (- 2) в точке (2, 0, 0, 0, 3). Максимум 5 в точке (0, 5, 9, 12, 0).

в) (д/з) $F = 4x_1 + x_3$

Система ограничений:

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$3x_1 - x_2 - x_4 = 0$

$2x_2 - x_1 \geq 0$.

Ответ: минимум 4 в точке (0, 0, 4, 0 или (1, 3, 0, 0). Максимум 28/3 в точке (8/3, 4/3, 0, 20/3).

г) (д/з) $F = 2x_1 + 3x_2$

Система ограничений:

$x_2 - 2x_1 + 3 \geq 0$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$2x_2 - x_1 \geq 0$.

Ответ: минимум 14/3 в точке (4/3, 2/3). Максимум 7 в точке (2, 1).

д) $F = x_1 + 2x_2$

Система ограничений:

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 - 2x_2 \leq 1$

Ответ: минимум 0 в точке (0, 0). Максимума не существует.

е) $F = x_1 - x_2$
Система ограничений:
$1 \le x_1 + x_2 \le 2$
$2 \le x_1 - 2x_2 \le 3$
$1 \le 2x_1 - x_2 \le 2$.
Ответ: система ограничений противоречива.

ЗАНЯТИЕ № 4. Решение практических задач графическим методом

Решить задачи 1.1. – 1.5 графоаналитическим методом. Проанализировать задачи на степень чувствительности к изменениям ограничений.

ЗАНЯТИЕ № 5. Решение задач линейного программирования симплекс-методом

1. Найти минимум целевой функции F при заданной системе ограничений симплекс-методом. Указать значения переменных x_1, x_2, … ($x_i \ge 0$) при которых достигается минимальное значение.

а) $F = x_1 - x_3$
Система ограничений:
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + 3x_2 + x_4 = 2$.
Отв. Минимум 3, в точке (0, 1, 3, 0).

б) $F = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$
Система ограничений:
$x_1 + x_4 + 6x_6 = 9$
$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2$
$x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6$
Отв. Минимум (-5), в точке (0, 5, 1.5, 0, 0, 1.5).

в) (д/з)$F = 5x_1 - 10x_2$
Система ограничений:
$-2x_1 + x_2 \le 1$
$-x_1 + x_2 \le 2$
$3x_1 + x_2 \le 8$
$-2x_1 + 3x_2 \ge -9$.
Отв. Минимум – 27,5 в точке (1.5, 3.5).

г) (д/з) $F = x_1 - x_2 - 4x_3 + 5$
Система ограничений:
$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10$
$x_1 - x_2 + x_3 \le 6$
$2x_1 + x_2 - x_3 \le 8$.
Отв. Минимум – 15 в точке (0, 0, 5) или (0, 3, 2).

д) $F = 3 + 4x_1 + 5x_2 - x_3$
$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 4$
$3x_2 - 2x_1 + x_3 \le 5$
$2x_1 - 3x_2 \le 3$
Отв. Минимум 1, (0, 0, 2, 0, 3, 9).

е) $F = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2$
Система ограничений:
$x_1 - x_2 + x_3 = 10$
$2x_1 - x_3 + x_4 \le 5$.
Отв. Минимум не существует.

2. Найти максимум целевой функции F при заданной системе ограничений симплекс-методом. Указать значения переменных x_1, x_2, … ($x_i \ge 0$) при которых достигается максимальное значение.

а) $F = x_1 + x_2$

Система ограничений:
$x_1 - x_2 \le 1$;
$x_2 - x_3 \le 1$
$x_1 + x_3 \le 2$.
Отв. Максимум 3 в точке (2, 1, 0).
б) $F = 2x_1 - x_3 + x_4$
Система ограничений:
$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 10$
$x_1 - x_3 + 2x_4 \le 8$. Отв. Максимального значения нет.
Выполнить самостоятельную работу (ОС-1)

ЗАНЯТИЕ № 6. Двойственные задачи (составление)

Задачи для самостоятельного решения:

1. Составьте двойственную задачу для задачи:

а) $\Phi = -y_1 - 2y_2 - 3y_3 \to \max$
$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,$
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 - 3y_3 \le 1 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 \le -1 \end{cases}$$

б) $\Phi = 3y_1 + 2y_2 \to \min$
$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,$
$$\begin{cases} 7y_1 + 2y_2 \ge 14 \\ 4y_1 + 5y_2 \ge 20 \end{cases}$$

в) $\Phi = 5y_1 + 4y_2 \to \max$
$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,$
$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 \le 24 \\ 3y_1 + 4y_2 \le 24 \end{cases}$$

Решите задачи с применением двойственного симплекс-метода.

2. Составить двойственную задачу по отношению к задаче, состоящей в максимизации функции $f = 2x_1 + x_2 + 3x_3$ при условиях
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \ge -24 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 \ge -3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3. Для производства трех видов изделий *A*, *B* и *C* используется три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в количестве, соответственно не большем 180, 210 и 244 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в таблице.

Виды сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	B	C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена единицы продукции (руб.)	10	14	12

Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается ее максимальная стоимость, и оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции. Оценки, приписываемые каждому из видов сырья, должны быть такими, чтобы оценка всего используемого сырья была минимальной, а суммарная оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида,– не меньше цены единицы продукции данного вида.

ЗАНЯТИЕ № 8. Двойственные задачи в анализе действий конкурентов. Теневые цены

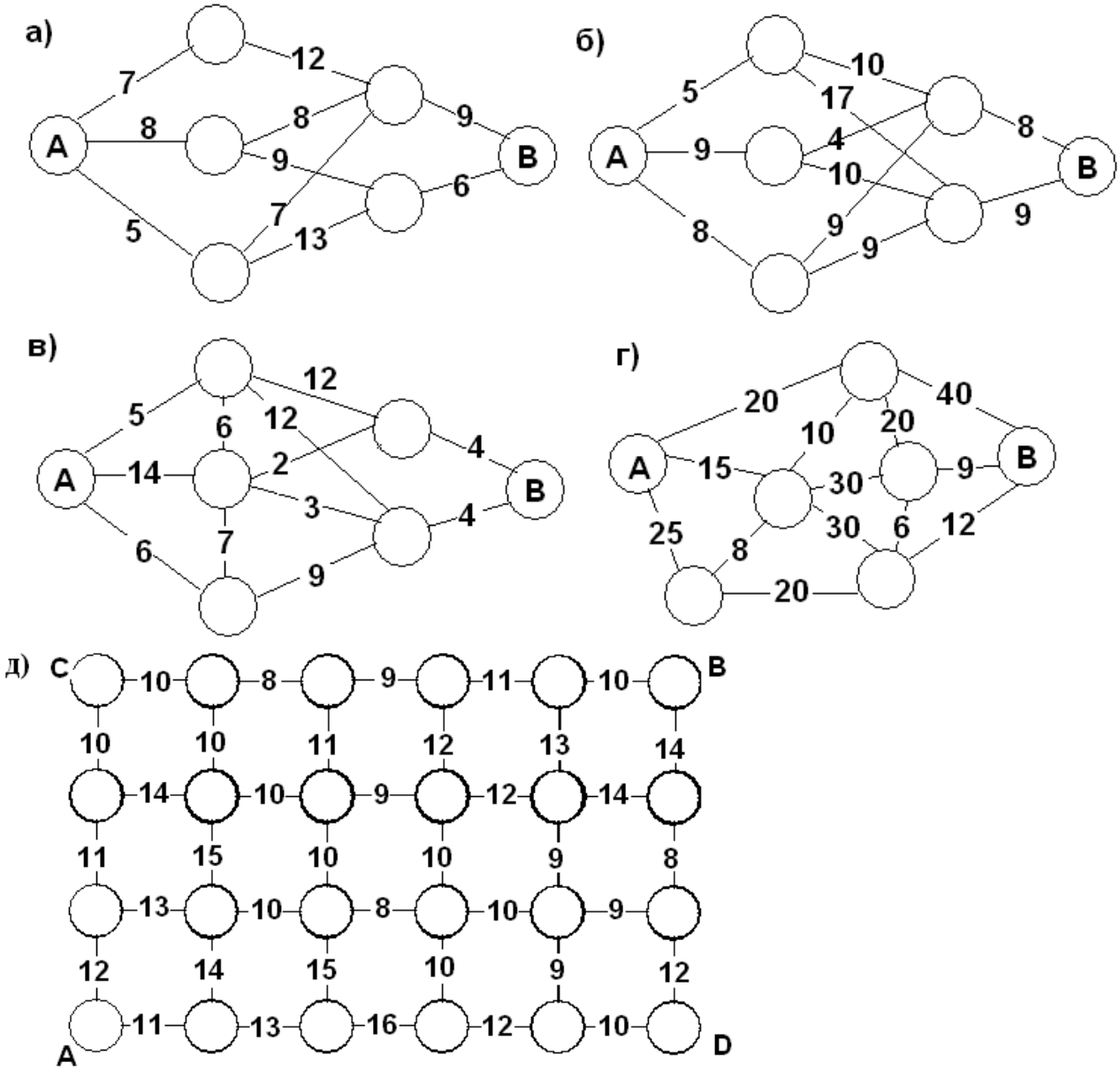
1. Фирма выпускает два типа строительных блоков – обычные и улучшенные. При этом производятся две основные операции – прессование и отделка. Требуется составить оптимальный план выпуска блоков, если чистая прибыль от продажи одного обычного блока составляет 100 рублей, а улучшенного – 180 рублей. Материальные и временные затраты при этом заданы в таблице:

	Обычные	Улучшенные	Имеющиеся ресурсы
Расходные материалы (кг)	20	40	4000
Время на прессование (часы)	4	6	900
Время на отделку	4	4	600
Затрачиваемые средства (руб.)	30	50	6000

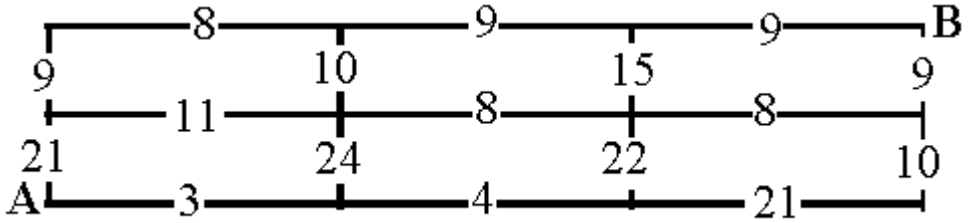
Определите цены, по которым конкурирующая фирма может перекупить наше рабочее время и расходные материалы.

Общая характеристика методов динамического программирования

1. Дана транспортная схема (расстояния между соседними узлами указаны числами в км).



е)



Найдите длину кратчайшего маршрута от пункта А до пункта В.

2. Пусть на схеме указано количество достопримечательностей на данном маршруте. Составьте экскурсионный маршрут от А до В максимизирующий количество достопримечательностей, встречающихся по дороге.

ЗАНЯТИЕ № 9. Задача о найме сезонных рабочих

1. Потребности фирмы в сезонных рабочих представлены в таблице:

Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь
7	10	8	12	6	10

Реклама о найме обходится в 15 тыс.рублей в месяц, зарплата рабочему – 10 тыс. рублей в месяц. При увольнении выплачивается компенсация 5 тыс. рублей. Составить оптимальный план найма.

2. Некоторая туристическая фирма оценивает потребности в гидах следующим образом: на май месяц – 5 человек, на июнь – 6 человек, на июль – 8 человек, на август – 4 человека, на сентябрь 6 человек. Содержание избытка рабочей силы обходится фирме в 300 $ в месяц за каждого лишнего человека, а наём рабочих на протяжении месяца обходится в 400 $ в месяц (за объявление о найме) плюс 200 $ в месяц за человека (на обучение). Составьте оптимальный план найма рабочих, позволяющий минимизировать расходы по найму.

3. (д/з) Подрядчик оценивает минимальные потребности в рабочей силе на каждую из 5 следующих недель: а) 5, 7, 8, 4 и 6 рабочих соответственно. Содержание избытка рабочей силы обходится в 300 долларов в неделю, а наём рабочих на протяжении недели обходится в 400 $ (за объявление о найме) плюс 200 $ за каждого рабочего в неделю. Составьте оптимальный план найма рабочих, позволяющий минимизировать расходы по найму.

б) решить ту же задачу, если потребности в рабочей силе составят 6, 5, 3, 6 и 8.

ЗАНЯТИЕ №10. Задача об оптимальном распределении сотрудников по проектам

В таблице указан доход, который приносят предприятия при инвестировании в них сумм, указанных в левом столбце. Составьте оптимальный план распределения капиталовложений между тремя предприятиями, при котором будет достигнут максимальный доход.

а) Имеется капитал 10 тыс. долларов

Объём капиталовложений (тыс. долларов)	Доход (тыс. руб.)				
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4	Предприятие 5
1	1,5	2,1	1,6	1,3	1,4
2	3,1	3,5	3,1	3,6	3,2
3	6,4	6,2	6,3	6,4	6,3
4	8,0	7,8	7,4	7,4	8,0
5	9,5	9,5	9,6	9,2	9,5
6	11,8	12,9	11,7	11,5	13
7	11,8	12,9	11,7	11,5	13,5
8	11,8	12,9	11,7	11,5	13,5

б) Имеется капитал в 400 тысяч рублей.

Объём капиталовложений (тыс. руб.)	Доход (тыс. руб.)		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
100	71	75	81
200	157	168	162
300	246	243	243
400	324	322	321

Ответ. вложить 200 тыс. во второе и 200 тыс. в третье. Прибыль 330 тыс.

7. Пусть в фирме работает n сотрудников равной квалификации. каждому из которых (либо несколькими одновременно) можно поручить выполнение некоторых видов работ (заказов). Доходность от выполнения заказа меняется, в зависимости от того, сколько сотрудников одновременно задействовано в его выполнении. Эти изменения не линейны и заданы с помощью таблиц (то, что начиная с некоторого количества доходность перестаёт возрастать означает, что выполнение данного заказа не требует столь большого количества сотрудников). Составьте оптимальный план распределения сотрудников, при котором обеспечен максимальный доход:

а) Общее количество сотрудников равно n = 10

Количество сотрудников	Доход (тыс. руб.)				
	Заказ 1	Заказ 2	Заказ 3	Заказ 4	Заказ 5
1	0,5	0,1	0,6	0,3	1,0
2	1,0	0,5	1,1	0,6	1,2
3	1,4	1,2	1,2	1,3	1,3
4	2,0	1,8	1,4	1,4	1,3
5	2,5	2,5	1,6	1,5	1,3
6	2,8	2,9	1,7	1,5	1,3
7	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3
8	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3
9	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3
10	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3

б) Общее количество сотрудников равно n = 40

Количество сотрудников	Доход (тыс. руб.)		
	Заказ 1	Заказ 2	Заказ 3
10	35	20	22
20	69	75	71
30	132	120	145
40	167	158	150

ЗАНЯТИЕ № 11. Выступление с докладами по темам рефератов

ЗАНЯТИЕ № 12. Анализ рентабельности предприятий. Модель Леонтьева

1.Компания добывает нефть и уголь. При добыче 1 тонны угля 7 % расходуется на внутренние нужды, также расходуется 0.14 тонн нефти. При производстве угля оборудования на одну тонну расходуется 0.12 тонн нефти и 0.1 тонна угля. Выяснить, является ли данное производство рентабельным. Определить, сколько всего необходимо добыть угля и нефти (валовой продукт), если поступил заказ на приобретение 144 тонн нефти и 123 тонн угля (конечный продукт).

2. При производстве электроэнергии на внутренние нужды расходуется 1/3 от всей производимой энергии, коэффициент амортизации оборудования 1/12. При производстве соответствующего оборудования расходуется ½ условной единицы энергии, коэффициент амортизации оборудования ¼. Определите, будет ли данное производство рентабельным.

Какое количество энергии и оборудования необходимо произвести, чтобы обеспечить продажу 4000 усл. ед. энергии и 5000 единиц оборудования.

3. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчётный период

отрасль		потребление		Конечный продукт	Валовый выпуск
		энергетика	машиностроение		
Производство	энергетика	7	21	72	100
	машиностроение	12	15	123	150

Вычислить необходимый объём валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление в энергетической отрасли возрастёт в два раза, а в машиностроении сохранится на прежнем уровне.

ЗАНЯТИЕ № 13. Лексикографическая оптимизация и субоптимизация. Оценка коэффициента конкордации

1. Предположим, что Вам предстоит выбрать место работы из девяти вариантов, представленных в таблице 1. В качестве основных критериев выбраны: дневная зарплата, длительность отпуска, время поездки на работу. Так как критерий времени поездки отрицательный, оценки по этому критерию берутся со знаком минус. Какой вариант является оптимальным? Решите задачу с помощью различных оптимизационных методов

Таблица 1

	Критерий		
Варианты	Зарплата (руб)	Длительность отпуска (дни)	Время поездки (мин)
1	900	20	-60
2	500	30	-20
3	700	36	-40
4	800	40	-50
5	400	60	-15
6	600	30	-10
7	900	35	-60
8	600	24	-10
9	650	35	-40

2. Дана таблица экспертных оценок. Определите коэффициент конкордации

Номер объекта экспертизы	Оценка эксперта				
	1-го	2-го	3-го	4-го	5-го
1	4	6	4	4	3
2	3	3	2	3	4
3	2	2	1	2	2
4	6	5	6	5	6
5	1	1	3	1	1
6	5	4	5	6	5
7	7	7	7	7	7

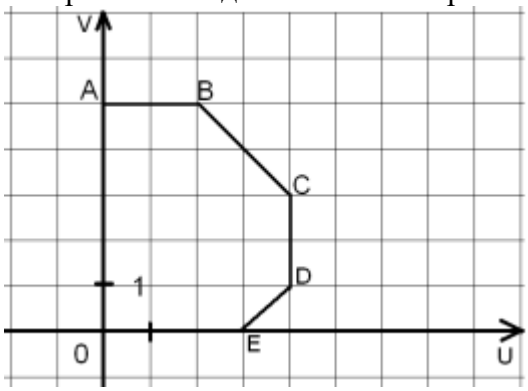
Деловая игра

Рассматривается задача трудоустройства. Фронтально методом мозгового штурма группой определяют критерии, важные при выборе работы (зарплата, длительность поездки до места работы, социальный пакет, длительность отпуска и т.п.). Затем происходит разбивка на 3-4 микрогруппы, каждая из которых заполняет 3-4 строки таблиц с числовыми значениями по данным критериям. Производится обмен результатами.

Определяется Парето оптимальное множество. Из данного множества осуществляется выбор согласно лексикографическому принципу (упорядочивание критериев одна группа задает для другой, результаты контролируются взаимно между микрогруппами). Затем аналогичным образом осуществляется выбор наилучшей работы путем субоптимизации (главный критерий выбирается различным для каждой микрогруппы – путем жеребьёвки), допустимые границы устанавливаются в рамках микрогруппы самостоятельно, производится их последующее обоснование. В качестве домашнего задания каждый индивидуально составляет обобщенный критерий с обоснованием выбора весов в письменной форме.

ЗАНЯТИЕ № 14. Метод идеальной точки в решении многокритериальных задач

1. На графике изображена область допустимых значений двух целевых функций U и V, которые необходимо максимизировать.



Указать границу Парето и точку утопии. Найти оптимальное решение методом идеальной точки.

2. На множестве, определяемом системой неравенств, заданы два положительных критерия U и V. Принять решение методом идеальной точки.

а) $0 \le x \le 1$ $0 \le y \le 4$ $U = 2x + 1$, $V = 2y + 3$	б) $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 4$, $2x + y \le 6$, $U = x + y + 2$, $V = x - y + 6$.

3. Два друга предпринимателя решили установить общую аппаратуру в общем помещении, в котором они будут работать в две смены (один бизнесмен в одну – другой – в другую). Но, поскольку производимая продукция была различна, то оказалось, что их интересы не вполне совпадают. Дневная прибыль, которую может получить первый предприниматель на одном станке первого типа оказалась равна 2 тыс. руб, а на одном станке второго типа – 3 тыс. руб. Для второго предпринимателя дневная прибыль с одного станка первого типа равна 6 тыс. руб, а со станка второго типа – 6 тыс. руб. Кроме того, в помещении можно было установить не более 10 станков любого типа; предельная сумма, которую предприниматели смогли выделить на приобретение станков оказалась равной 120 тыс. руб. Стоимость одного станка первого типа составляет 10 тыс. руб, второго – 15 тыс. руб. Определите компромиссное решение по определению оптимального соотношения устанавливаемых станков методом идеальной точки.

4. Имеется некоторое экологически вредное производство. Пусть x – количество оборудования (стоимостью 10 тыс. руб. за единицу), y – количество фильтров (стоимостью 5 тыс. руб. за единицу). Тогда прибыль фирмы рассчитывается по формуле $U = 5x - 2y$, а выбросы – по формуле $V = x - y$. На закупку оборудования и фильтров имеется не более 3 млн. руб. Составьте оптимальный план закупок.

ЗАНЯТИЕ № 15. Контрольная работа

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Соколов Г.А. Линейные целочисленные задачи оптимизации : учеб. пособие. — М.: ИНФРА-М, 2017. — 132 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=514697)
2. Ващекин, А. Н. Математические методы и модели в экономике : учебное пособие / А. Н. Ващекин, В. Ю. Квачко, Е. В. Царькова ; под. ред. Е. В. Царьковой. – М.: РГУП, 2019. - 158 с. - - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1194065.
3. Рыков В.В. Основы теории массового обслуживания (Основной курс: марковские модели, методы марковизации) : учебное пособие / В.В. Рыков, Д.В. Козырев. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 223 с. (Режим доступа. - URL: https://znanium.com/catalog/product/129032)
4. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций : учебник / АС. Шапкин, В. А. Шапкин. – М. : Дашков и К°, 2019. – 398 с. – Режим доступа: . –URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573373

Дополнительная литература

1. Мастяева И.Н., Горемыкина Г.И., Семенихина О.Н. Методы оптимальных решений. - М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. – 384 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=521453)
2. Малугин В. А. Количественный анализ в экономике и менеджменте: Учебник / Малугин В.А., Фадеева Л.Н. - М.:НИЦ ИНФРА-М, НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 615 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=558504)
3. Шапкин, А. С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию: учебное пособие / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – М : Дашков и К°, 2020. – 432 с. – Режим доступа: URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573151
4. Высшая математика для экономистов : учебник / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; ред. Н. Ш. Кремер.. – М.: Юнити, 2015. – 482 с. : – Режим доступа: – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114541
5. Белько И.В., Морозова И.М., Криштапович Е.А. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование: Учебное пособие. – М.: НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. – 299 с. Режим доступа: (http://znanium.com/bookread2.php?book=542521)

– Интернет-ресурсы

- ЭБС ZNANIUM.COM http://znanium.com
- ЭБС «Университетская библиотека онлайн» http://biblioclub.ru
- Электронная библиотека http://lib.mexmat.ru/books/75829 (свободный доступ)
- Электронная библиотека http://www.razym.ru (свободный доступ)
- http://nsportal.ru/sites/default/files/2012/12/10/tvorcheskiy_proekt_po_matematike_na_temu.docx .