Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической
работе
_____ С.Н. Титов
«24» июня 2022 г.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Программа учебной дисциплины
Модуля специальных разделов предметной области

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы
Математика

(заочная форма обучения)

Составитель: Макеева О.В., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от «25» марта 2022 г. №5

Ульяновск, 2022

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» относится к Модулю специальных разделов предметной области Части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. Дисциплины (модули) учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Математика», заочной формы обучения.

Процесс освоения дисциплины использует результаты изучения учебной дисциплины «Математический анализ».

Результаты освоения дисциплины необходимы для Подготовки к сдаче и сдачи государственного экзамена и Выполнения и защиты выпускной квалификационной работы Блока 3. Государственная итоговая аттестация.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью изучения дисциплины является подготовка бакалавра к профессиональной деятельности педагога образовательной организации. Дисциплина предназначена дать будущим учителям профессиональную (теоретическую и практическую) подготовку в области теории и методики обучения математике на различных ступенях образования.

Задачами изучения дисциплины являются освоение системы базовых понятий, структур и методов математического анализа в широком смысле, развитие умения работать с математическими объектами высокого уровня абстракции, формирование системных знаний по базовым разделам современной математики, а также представлений о структуре математического знания в целом.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач. УК 1.2 – Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и	ОР-1. Знает о взаимосвязи инструментария и модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле	ОР-2. Умеет отбирать и применять адекватные инструменты для решения модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле	ОР-3. Владеет способностью систематизировать результаты решения модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле

чужой мыслительной деятельности.			
ПК-1 Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач. ПК-1.1 Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.	ОР-4. Знает инструментальные возможности комплексного анализа для решения задач математического анализа и элементарной математики	ОР-5. Умеет применять инструменты комплексного анализа для решения задач математического анализа и элементарной математики	
ПК-3. Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов. ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной	ОР-6. Знает о прикладном характере математических моделей, построенных на основе теории функций комплексной переменной и возможностях их использования для формирования просветительских запросов обучающихся.	ОР-7. Умеет осмысливать прикладной характер математических моделей, построенных на основе теории функций комплексной переменной и использовать их возможности для формирования просветительских запросов обучающихся.	ОР-8. Владеет способностью организовывать интеграцию результатов решения модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле в единую систему знаний

деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).			

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Всего		Учебные занятия					Форма промежуточной аттестации
	Трудоемк.		Лекции, час	Практические занятия, час	В том числе практическая подготовка, час	Лабораторные занятия, час	Самостоятельная работа, час	
	Зач. ед.	Часы						
5	3	108	4	10	-	-	85	9 экзамен
Итого:	3	108	4	10	-	-	85	9 экзамен

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ п/п	Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
5 семестр					
1.	Введение в комплексный анализ. Дифференциальное исчисление функций комплексного переменного	2	4		40

2.	Элементы теории рядов и интегральное исчисление функций комплексного переменного	2	6		45
	Итого	**4**	**10**		**85**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Раздел 1. Введение в комплексный анализ. Дифференциальное исчисление функций комплексного переменного.

Поле С комплексных чисел. Множество комплексных чисел как банахово пространство. Окрестности. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Стереографическая проекция. Последовательности комплексных чисел. Ряды комплексных чисел. Комплекснозначные функции действительной переменной и кривые на комплексной плоскости; дифференцирование и интегрирование комплекснозначных функций действительной переменной. Функция комплексной переменной; её действительная и мнимая части, геометрическое истолкование; предел, непрерывность.

Дифференцируемые функции комплексной переменной. Производная. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции комплексной переменной (в точке, в области; определение в терминах дифференцируемости). Гармонические функции и их связь с аналитическими.

Раздел 2. Элементы теории рядов и интегральное исчисление функций комплексного переменного.

Последовательности и ряды функций комплексной переменной. Степенные ряды: круг и радиус сходимости. Дифференцирование степенных рядов. Определение аналитической функции как суммы степенного ряда. Равносильность двух определений аналитической функции. Неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.

Экспонента, тригонометрические и гиперболические функции в комплексной области, связь между ними. Дробно-линейная функция. Многозначные функции. Понятие римановой поверхности. Логарифмическая функция в комплексной области. Степень с произвольным комплексным показателем. Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции.

Интеграл от функции комплексной переменной по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Первообразная и интеграл. Интегральная формула Коши. Ряды Тейлора и ряды Лорана и их области сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек. Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Вычет аналитической функции. Вычисление вычетов и их приложение к вычислению интегралов.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя.

Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения проверочных и лабораторных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме подготовки к устным выступлениям (комментирование решения задач домашних заданий, итоговой контрольной работы, творческого задания; доклады по темам индивидуальных и групповых проектов, рефератов).

ОС-7 Итоговая контрольная работа

Примерное содержание итоговой контрольной работы

1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.
2. Представить в алгебраической форме число $\mathrm{Ln}\,(-1-i)$.
3. Представить в алгебраической форме число $\mathrm{Arcth}\left(\dfrac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right)$.
4. Вычертить область, заданную неравенствами: $|z-1+i|\geq 1,\ \mathrm{Re}\,z<1, \mathrm{Im}\,z\leq -1.$
5. Определить вид кривой $z(t)=4\mathrm{cosec}\ t-i2\mathrm{ctg}\ t.$
6. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x,y)=3x^2y-y^3$ и значению $f(0)=1$.
7. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного $\int\limits_{ABC}(z^2+1)dz$ по данной кривой: $ABC-\textit{ломанная},\ z_A=0,\ z_B=-1+i, z_C=i$.
8. Найти все лорановские разложения функции $f(z)=\dfrac{z+2}{z+z^2+2z^3}$ по степеням z

9. Функцию $f(z) = z\cos\pi\dfrac{z+3}{z-1}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$.

10. Определить тип особой точки $z = 0$ для функции $f(z) = ze^{\frac{4}{z^3}}$.

11. Для функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$ найти изолированные особые точки и определить их тип.

12. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\left|z+\frac{3}{2}\right|=1} \dfrac{\cos^2 z + 3}{2z^2 + \pi z}dz$.

13. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{z^2 + \cos z}{z^3}dz$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{\sqrt{15}\sin t - 4}$.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: материалы контрольных работ, индивидуальных и групповых заданий, итоговой контрольной работы. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
1.	**Оценочные средства для текущей аттестации** ОС-1 Индивидуальное / групповое задание ОС-2 Индивидуальное / групповое задание ОС-3 Индивидуальное / групповое задание ОС-4 Индивидуальное / групповое задание	ОР-1. Знает о взаимосвязи инструментария и модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле ОР-2. Умеет отбирать и применять адекватные инструменты для решения модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле ОР-3. Владеет способностью систематизировать результаты решения модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле

	ОС-5 Индивидуальное / групповое задание ОС-6 Индивидуальное / групповое задание ОС-7 Итоговая контрольная работа	ОР-4. Знает инструментальные возможности комплексного анализа для решения задач математического анализа и элементарной математики ОР-5. Умеет применять инструменты комплексного анализа для решения задач математического анализа и элементарной математики ОР-6. Знает о прикладном характере математических моделей, построенных на основе теории функций комплексной переменной и возможностях их использования для формирования просветительских запросов обучающихся ОР-7. Умеет осмысливать прикладной характер математических моделей, построенных на основе теории функций комплексной переменной и использовать их возможности для формирования просветительских запросов обучающихся. ОР-8. Владеет способностью организовывать интеграцию результатов решения модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле в единую систему знаний
2.	**Оценочные средства для промежуточной аттестации** ОС-8 Экзамен в форме устного собеседования	

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-1 Индивидуальное / групповое задание

1. Решите уравнение. Изобразите решение на комплексной плоскости.
   $z^4+16=0$; $z^2+|z|=0$; $z+|z|=2+i$.
2. Изобразите и опишите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданным условиям: $Rez>-1$; $|\operatorname{Im} z|\le 2$; $3\le|z+2-i|<6$.
3. Выясните, какая линия задается на комплексной плоскости комплекснозначной функцией действительного аргумента. Изобразите линию.
   $z=t^2+it$, $-\infty<t<+\infty$; $z=2it$, $-1\le t\le 1$; $z=-3i+e^{it}$, $3\pi<t\le 5\pi$.
4. Выделите действительную и мнимую части функции $w=f(z)$:
   $w=\dfrac{z-i}{z+i}$; $w=\overline{z^2}+|z|^2$.
5. Представьте функцию $w=w(x,y)$ как функцию $w=f(z)$ переменного $z=x+iy$:
   $w=\dfrac{y-ix}{x^2+y^2}$; $w=y^3-3x^2y+y+i(x^3-3xy^2-x)$.
6. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$ по заданной действительной или мнимой части.
   $v(x,y)=x^3-3xy^2$; $u(x,y)=xe^x\cos y-(y+1)e^x\sin y$, $f(0)=i$.

ОС-2 Индивидуальное / групповое задание

1. Найдите линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами i, $1+2i$, $3i$ на подобный ему треугольник с вершинами $1-i$, $2-2i$, $3-i$. Решение сопроводите иллюстрацией.
   Ответ: $w=-i(z+1)$.
2. Найдите дробно-линейную функцию, которая отображает точки 0, 1, ∞ плоскости z соответственно в точки -1, 0, 1 плоскости w.
   Ответ: $w=\dfrac{z-1}{z+1}$.
3. Найдите образ линии при отображении $w=\dfrac{1}{z}$. Решение сопроводите иллюстрацией.
   a) прямая $y=x$; b) прямая $y=2$; c) окружность $(x-1)^2+y^2=1$.
   Ответ: a) прямая $y=-x$; b) окружность $x^2+\left(y+\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$; c) прямая $x=\dfrac{1}{2}$.
4. Начертите график функции $y=f(x)$.
   a) $f(x)=|\sin ix|$; b) $f(x)=|e^{ix}|$.
5. Решите уравнение.
   a) $\sin z=2$; b) $\cos z=0$.
   Ответ: a) $z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$, $k\in Z$; b) $z=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.
6. Вычислите и покажите несколько значений на комплексной плоскости.
   a) $\mathrm{Ln}(1+i)$; b) $\mathrm{Ln}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.
   Ответ: a) $\ln\sqrt{2}+i\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)\approx 0{,}3645+i\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$;
   b) $\ln 2+i\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\right)\approx 0{,}6931+i\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$.
7. Вычислите и представьте ответ в показательной форме.
   a) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; b) 1^{-i}; c) i^{i}; d) $(-1)^{i}$.
   Ответ: a) $e^{\frac{\pi}{4}-2\pi k}e^{i\left(2\pi k-\frac{\pi}{4}\right)}$, $k\in Z$; b) $e^{2\pi k}$, $k\in Z$; c) $e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k\in Z$; d) $e^{\pi+2\pi k}$, $k\in Z$.

ОС-3 Индивидуальное / групповое задание

1. Вычислите интегралы, представив их в виде криволинейных интегралов второго рода.
   a) $\int\limits_{\Gamma}|z|^2dz$, Γ – окружность $|z|=1$, обходится против часовой стрелки;
   b) $\int\limits_{\Gamma}z\,\mathrm{Re}\,z\,dz$, Γ – окружность $|z|=1$, обходится в направлении часовой стрелки;
   c) $\int\limits_{\Gamma}z\,\mathrm{Im}\,z^2dz$, Γ – нижняя полуокружность $|z|=1$, обходится в направлении часовой стрелки;

d) $\int\limits_{\Gamma} e^{|z|^2}\,\mathrm{Re}\,z\,dz$, Г – отрезок прямой от точки $z_0 = 0$ до точки $z_1 = 1 + i$;

Ответы: a) 0; b) 0; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right)(1 + i)$.

2. Вычислите интегралы, задавая путь интегрирования параметрическим уравнением.

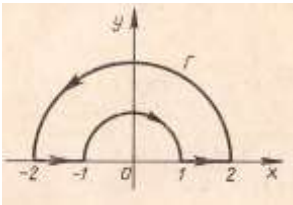
a) $\int\limits_{\Gamma} |z|dz$,

1) Г – прямолинейный отрезок $z_0 = -1$ до точки $z_1 = 1$;

2) Г – нижняя полуокружность $|z| = 1$ с началом в точке $z_0 = -1$;

b) $\int\limits_{\Gamma} z\,dz$, Г – замкнутый контур, образованный дугой параболы $y = -x^2 + 1$ и отрезком оси абсцисс, обходится против часовой стрелки;

c) $\int\limits_{\Gamma} \frac{\bar{z}}{z}dz$, Г – контур, изображенный на рисунке.



Ответы: a) 1) 1; 2) 2; b) 0; c) 4.

3. Вычислите интегралы (путь интегрирования обходится в положительном направлении).

3.1. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z}$, a) $\Gamma: |z - 2i| = 1$; b) $\Gamma: |z + i| = 2$.

3.2. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}$, a) $\Gamma: |z - 2i| = 2$; b) $\Gamma: |z + 2i| = 2$.

Ответы: 1. a) 0; b) $2\pi i$; 2. a) π; b) $-\pi$.

4. Вычислите интегралы.

a) $\int\limits_{i}^{1} \left(3z^4 - 2z^3\right)dz$; b) $\int\limits_{-i}^{0} z\cos z\,dz$; c) $\int\limits_{1-i}^{1+i} \frac{dz}{z}$; d) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, выбрать ту ветвь функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{-1} = i$.

Ответы: a) $\frac{3}{5}(1 - i)$; b) $1 + \mathrm{sh}\,1 - \mathrm{ch}\,1$; c) $\frac{\pi i}{2}$; d) $2(1 - i)$.

5. Вычислите интегралы, используя интегральную формулу Коши (окружности обходятся в положительном направлении).

5.1. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{(z + i)^4}{2z - i}dz$, a) $\Gamma: |z| = 1$; b) $\Gamma: |z - 1| = 1$.

5.2. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}$, a) $\Gamma: |z - i| = 1$; b) $\Gamma: |z + i| = 1$.

Ответы: 1. a) $\frac{81}{16}\pi i$; b) 0; 2. a) π; b) $-\pi$.

6. Вычислите интегралы, используя интегральную формулу Коши для производных.

6.1. a) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2}dz$; b) $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z + i)^3}dz$.

6.2. a) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{\left(z^2 + 1\right)^2}$; b) $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{dz}{\left(z^2 + 1\right)^2}$.

Ответы: 1. a) $2\pi i$; b) $-\pi\,\mathrm{sh}\,1$; 2. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $-\frac{\pi}{2}$.

ОС-4 Индивидуальное / групповое задание

1. Найдите круг сходимости степенного ряда.

   a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{3^n}z^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+i)^n}{3^{n+1}\cdot 2^{n-1}}$.

   Ответ: a) $|z|<3$; b) $|z+i|<6$.

2. Разложите функцию $f(z)$ в ряд по степеням $z-a$. Определите круг сходимости ряда.

   a) $f(z)=e^{2z}$, $a=i$; b) $f(z)=\frac{1}{z+4}$, $a=-1$.

   Ответ: a) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{2i}\frac{2^n}{n!}(z-i)^n$, $|z|<\infty$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z+1)^n$, $|z+1|<3$.

3. Найдите область сходимости ряда.

   a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+1}$; b) $\sum_{n=-1}^{-\infty}(z-i)^n$.

   Ответ: a) $1<|z|<3$; b) $|z-i|>1$.

4. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

   a) $f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$, $0<|z|<1$; b) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$, $0<|z|<\infty$.

   Ответ: a) $\sum_{n=-1}^{\infty}z^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{n-3}}$.

5. Найдите все возможные разложения функции $f(z)=\frac{1}{z^2-4z+3}$ в ряд Лорана по степеням a) $z-1$; b) z.

   Ответ: a) $-\frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}$ при $0<|z-1|<2$, $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}$ при $|z-1|>2$; b) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$ при $|z|<1$, $\frac{1}{2}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n\right]$ при $1<|z|<3$, $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}(3^n-1)$ при $|z|>3$.

6. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки и укажите область сходимости ряда.

   a) $f(z)=\frac{z^3}{z^2-2z+1}$; b) $f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$.

   Ответ: a) $z+2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{z^n}$, $1<|z|<+\infty$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-3}}{(2n)!}$, $0<|z|<+\infty$.

ОС-5 Индивидуальное / групповое задание

1. Является ли точка $z=z_0$ изолированной особой точкой функции $w=f(z)$?

   а) $f(z)=\cos\frac{1}{z-1}$, $z_0=1$; б) $f(z)=\sec\frac{1}{z-1}$, $z_0=1$.

   Ответ: а) да; б) нет;

2. Является ли точка $z=\infty$ изолированной особенностью функции $w=f(z)$?

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^5-1}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) да; г) нет.

3. Определите неизолированную особую точку $z=\tilde{z}$ функции $w=f(z)$ и укажите последовательность особых точек $\{z_k\}$, для которой $z=\tilde{z}$ является предельной точкой.

а) $f(z)=\operatorname{tg}\dfrac{1}{z-1}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{\cos \pi z}$.

Ответ: а) $\tilde{z}=1$, $\{z_k\}=\left\{1+\dfrac{2}{\pi(1+2k)}\right\}$; б) $\tilde{z}=\infty$, $\{z_k\}=\left\{k+\dfrac{1}{2}\right\}$; в) $\tilde{z}=0$, $\{z_k\}=\left\{\dfrac{1}{\pi k}\right\}$. Всюду $k\in Z$.

4. Найдите все изолированные особые точки z функции $w=f(z)$. Учитывая поведение функции в окрестности особой точки, установите её характер. В случае, когда особая точка является полюсом, определите его порядок.

а) $f(z)=\dfrac{z^3-1}{(z+2)^2(z-3)}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4}e^{\frac{1}{z-2}}$.

Ответ: а) $z_0=-2$ - полюс 2-го порядка, $z_1=3$ - простой полюс, $z_2=\infty$ - устранимая особая точка; б) $z_0=2$ - существенно особая точка, $z_1=-2$ - простой полюс, $z_2=\infty$ - устранимая особая точка.

5. Найдите все изолированные особые точки z функции $w=f(z)$. Учитывая разложение функции в ряд Лорана в окрестности особой точки, установите её характер. В случае, когда особая точка является полюсом, определите его порядок.

а) $f(z)=\sin z+\sin\dfrac{1}{z}$; б) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$; в) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; г) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2}$;

Ответ: а) $z_0=0$, $z_1=\infty$ - существенно особые точки; б) $z_0=0$ - устранимая особа точка, $z_1=\infty$ - существенно особая точка; в) $z_0=0$ - устранимая особа точка, $z_1=\infty$ - существенно особая точка; г) $z_0=0$ - полюс 2-го порядка, $z_1=\infty$ - существенно особая точка.

ОС-6 Индивидуальное / групповое задание

1. Найдите вычеты функции $w=f(z)$ во всех её особых точках.

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$; б) $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$; в) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-3)}$; г) $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^5}$;

д) $f(z)=\dfrac{z^4}{z^4+1}$; е) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$; ж) $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$; з) $f(z)=\dfrac{1-\sin z}{(2z-\pi)^2}$.

Ответ: а) $\operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z)=1$; $\operatorname{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=-1$; б) $\operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z)=\dfrac{1}{2}$; $\operatorname{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=-\dfrac{1}{2}$;

в) $\operatorname{Res}\limits_{z=i} f(z)=-\dfrac{1-3i}{20}$; $\operatorname{Res}\limits_{z=-i} f(z)=-\dfrac{1+3i}{20}$; $\operatorname{Res}\limits_{z=3} f(z)=\dfrac{1}{10}$; $\operatorname{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$;

г) $\operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z)=1$; $\operatorname{Res}\limits_{z=1} f(z)=-\dfrac{1}{2}$; $\operatorname{Res}\limits_{z=-1} f(z)=-\dfrac{1}{2}$; $\operatorname{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$;

д) $\operatorname{Res}\limits_{z_k} f(z)=\dfrac{z_k}{4}$, $z_k=e^{\frac{\pi i}{4}+\frac{\pi i}{2}k}$, $k=0,1,2,3$; $\operatorname{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$;

е) $\operatorname{Res}_{z_k} f(z)=1,\ z_k=2\pi k i,\ k\in Z$; ж) $\operatorname{Res}_{z_k} f(z)=\dfrac{(-1)^{k+1}}{\pi^2 k^2},\ z_k=\dfrac{1}{\pi k},\ k\in Z$;

з) $\operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z)=0$.

2. Вычислите контурный интеграл, применяя основную теорему о вычетах.

а) $\oint\limits_{|z-1|=3}\dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z+1)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$; в) $\oint\limits_{|z-i|=1}\dfrac{z^2-1}{z^2+1}dz$; г) $\oint\limits_{|z+i|=2}\dfrac{e^z}{z}dz$;

д) $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{z^3}{z^{20}-1}dz$; е) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z^9}{z^5-1}dz$; ж) $\oint\limits_{|z|=1}\sin\dfrac{1}{z}dz$; з) $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{z+1}{e^z+1}dz$.

Ответ: а) 0; б) 0; в) -2π; г) $2\pi i$; д) 0; е) $-2\pi i$; ж) $2\pi i$; з) $-4\pi i$; и) $2\pi i$; к) 0.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-8 Экзамен в форме устного собеседования

Программа экзамена

Раздел 1. Введение в комплексный анализ. Дифференциальное исчисление функций комплексного переменного

17. Множество комплексных чисел. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана и стереографическая проекция.
18. Функции комплексного аргумента: действительная и мнимая часть, предел, непрерывность, примеры.
19. Производная функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана дифференцируемости функции комплексной переменной. Определение аналитической функции.
20. Определение аналитической функции. Гармонические функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части.
21. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной. Конформные отображения.

Раздел 2. Элементы теории рядов и интегральное исчисление функций комплексного переменного.

22. Интеграл комплекснозначной функции комплексной переменной вдоль кривой: определение, сведение к криволинейному интегралу второго рода.
23. Интегральная теорема Коши для односвязной области, ее следствия.
24. Независимость интеграла аналитической функции от пути интегрирования. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница.
25. Интегральная теорема Коши для многосвязной области.
26. Интегральная формула Коши.
27. Экспонента в комплексной области и ее свойства.
28. Синус и косинус комплексного аргумента, их свойства. Формулы Эйлера.
29. Гиперболические функции в комплексной области. Связь между синусом и косинусом и гиперболическими функциями в комплексной плоскости.
30. Логарифмическая функция в комплексной области.

31. Определение степени с комплексным показателем. Степенная функция в комплексной области. Радикал, главная ветвь радикала. Показательная функция – как многозначная функция в комплексной плоскость.
32. Обратные тригонометрические функции в комплексной области.
33. Степенные ряды в комплексной области: область сходимости, радиус сходимости. Ряд Тейлора аналитической функции. Разложение аналитической функции в степенной ряд. Второе определение аналитической функции. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.
34. Ряды Лорана: область сходимости. Разложение функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана.
35. Изолированные особые точки аналитической функции. Лорановское разложение функции в окрестности изолированной особой точки. Классификация изолированных особых точек. Бесконечность как особая точка аналитической функции.
36. Вычеты аналитической функции. Теорема о вычетах. Теорема о полной сумме вычетов.
37. Вычисление вычетов аналитической функции в простых и кратных полюсах.
38. Применение вычетов к вычислению интегралов.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования баллов, набранных в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен	Итоговая сумма баллов
$1\times 9=9$	$1\times 15=15$	212	64	300

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Результат	Баллы (3 ЗЕ)
«отлично»	271-300 баллов
«хорошо»	211-270 баллов
«удовлетворительно»	151-210 баллов
«неудовлетворительно»	0-150 баллов

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на

самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

Занятие 1. Введение в анализ на комплексной плоскости.

Материал для освоения

1. Окрестность точки на комплексной плоскости. Расширенная комплексная плоскость.
2. Последовательности комплексных чисел.
3. Ряды комплексных чисел.
4. Комплекснозначные функции действительного аргумента.
5. Линии и области на комплексной плоскости.

Занятие 2. Функции комплексного аргумента и их дифференцирование. Аналитические функции

Материал для освоения

1. Функции комплексного аргумента: действительная и мнимая часть, предел, непрерывность, примеры.
2. Отображения задаваемые функциями комплексного аргумента и их наглядная интерпретация.
3. Производная функции комплексной переменной как предел.
4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной.
5. Определение аналитической функции.
6. Гармонические функции.
7. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части.
8. Линейная и дробно-линейная функции на комплексной плоскости.
9. Конформные отображения.

Занятие 3. Интегрирование на комплексной плоскости

Материал для освоения

1. Интеграл комплекснозначной функции действительной переменной вдоль кривой: определение, сведение к определенному интегралу по параметру.

2. Интеграл комплекснозначной функции комплексной переменной вдоль кривой: определение, сведение к криволинейному интегралу второго рода.
3. Независимость интеграла аналитической функции от пути интегрирования.
4. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница на комплексной плоскости.
5. Интегральная теорема Коши для односвязной области, ее следствия.
6. Интегральная теорема Коши для многосвязной области.
7. Интегральная формула Коши.

Занятие 4. Элементарные функции на комплексной плоскости

Материал для освоения

1. Экспонента.
2. Синус и косинус. Эйлера.
3. Гиперболические функции. Связь между синусом и косинусом и гиперболическими функциями в комплексной плоскости.
4. Логарифмическая функция.
5. Степенная функция.
6. Радикал, главная ветвь радикала.
7. Показательная функция.
8. Обратные тригонометрические функции.
9. Обратные гиперболические функции.

Занятие 5. Степенные ряды на комплексной плоскости

Материал для освоения

1. Ряд Тейлора.
2. Ряд Лорана.
3. Изолированные особые точки аналитической функции.
4. Лорановское разложение функции в окрестности изолированной особой точки.
5. Бесконечность как особая точка аналитической функции.
6. Вычеты аналитической функции.
7. Вычисление вычетов аналитической функции в простых и кратных полюсах.
8. Применение вычетов к вычислению интегралов.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Геворкян, Э. А. Теория функций комплексной переменной : учебное пособие / Э. А. Геворкян, А. С. Фокст. – Москва : Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2004. – 164 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90747. – Текст : электронный.
2. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной: учебник / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов, - 6-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 336 с.: ISBN 978-5-9221-0133-2. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/544573. – Режим доступа: по подписке.

Дополнительная литература

1. Малышева, Н. Б. Функции комплексного переменного [Электронный ресурс] : Учеб. для вузов./ Н. Б. Малышева, Э. Р. Розендорн ; Под ред. Э. Р. Розендорна. - Москва :

ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 168 с. - ISBN 978-5-9221-0977-2. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/544726. – Режим доступа: по подписке.