Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0233C9D60038B01A9E48C1A3FBB4A9D9F6
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 07.07.2023 до 28.04.2038

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической
работе С.Н. Титов

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Программа учебной дисциплины
Модуля специальных разделов предметной области

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Иностранный язык

(очная форма обучения)

Составитель: Макеева О.В., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от « 26 » мая 2023 г. № 5

Ульяновск, 2023

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дополнительные вопросы математического анализа» является дисциплиной по выбору и относится к Модулю специальных разделов предметной области Части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. Дисциплины (модули) учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Иностранный язык», очной формы обучения.

Процесс освоения дисциплины использует результаты изучения учебных дисциплин «Математический анализ», «Многомерный математический анализ».

Результаты освоения дисциплины необходимы для прохождения практики Научно-исследовательская работа Модуля учебно-исследовательская и проектная деятельность Обязательной части Блока 2. Практики; для Подготовки к сдаче и сдачи государственного экзамена и Выполнения и защиты выпускной квалификационной работы Блока 3. Государственная итоговая аттестация.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью изучения дисциплины является подготовка бакалавра к профессиональной деятельности педагога образовательной организации. Дисциплина предназначена дать будущим учителям профессиональную (теоретическую и практическую) подготовку в области теории и методики обучения математике на различных ступенях образования.

Задачами изучения дисциплины являются освоение системы базовых понятий, структур и методов математического анализа в широком смысле, развитие умения работать с математическими объектами высокого уровня абстракции, формирование системных знаний по базовым разделам современной математики, а также представлений о структуре математического знания в целом.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач. УК 1.2 – Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	ОР-1. Знает о взаимосвязи инструментария и модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле	ОР-2. Умеет отбирать и применять адекватные инструменты для решения модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле	ОР-3. Владеет способностью систематизировать результаты решения модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле
ПК-1 Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач. ПК-1.1 Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.	ОР-4. Знает инструментальные возможности функционального и комплексного анализа для решения задач математического анализа и элементарной математики	ОР-5. Умеет применять инструменты функционального и комплексного анализа для решения задач математического анализа и элементарной математики	

ПК-3. Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов. ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).	ОР-6. Знает о прикладном характере математических моделей, построенных на основе теории функций вещественной и комплексной переменной и возможностях их использования для формирования просветительских запросов обучающихся.	ОР-7. Умеет осмысливать прикладной характер математических моделей, построенных на основе теории функций вещественной и комплексной переменной и использовать их возможности для формирования просветительских запросов обучающихся.	ОР-8. Владеет способностью организовывать интеграцию результатов решения модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле в единую систему знаний

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Всего		Учебные занятия					Форма промежуточной аттестации
	Трудоемк.		Лекции, час	Практические занятия, час	В том числе практическая подготовка, час	Лабораторные занятия, час	Самостоятельная работа, час	
	Зач. ед.	Часы						
9	2	72	12	20	-	-	40	зачет
10	3	108	18	30	-	-	33	27 экзамен
Итого:	5	180	30	50	-	-	73	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ п/п	Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
9 семестр					
1.	Элементы теории множеств	6	10		20
2.	Начала функционального анализа	6	10		20
	Итого	**12**	**20**		**40**
10 семестр					
3.	Введение в комплексный анализ. Дифференциальное исчисление функций комплексного переменного	6	12		15
4.	Элементы теории рядов и интегральное исчисление функций комплексного переменного	12	18		18
	Итого	**18**	**30**		**33**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Раздел 1. Элементы теории множеств.

Множество как неопределяемое понятие в теории Кантора. Равномощные множества. Мощность множества. Конечные множества. Счетные множества. Счетность множества целых чисел, множества рациональных чисел, множества алгебраических чисел. Несчетность отрезка [0;1]. Множества мощности континуум.

Несчетность множества иррациональных чисел, множества трансцендентных чисел, множества действительных чисел, множества комплексных чисел. Сравнение мощностей.

Теорема Кантора-Бернштейна. Булеан множества. Теорема Кантора о сравнении мощности множества и мощности его булеана. Примеры множеств мощности гиперконтинуум. Бесконечность шкалы мощностей.

Раздел 2. Начала функционального анализа.

Метрика как функция двух переменных. Метрическое пространство, примеры метрических пространств. Предел последовательности точек метрического пространства. Открытые, замкнутые, совершенные множества. Множество Кантора и его свойства. Полные метрические пространства. Непрерывные отображения метрических пространств. Сжимающие отображения метрических пространств. Теорема Банаха (принцип сжимающих отображений). Примеры.

Нормированные пространства, примеры. Банаховы пространства. Связь метрики и нормы.

Пространства со скалярным произведением, примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Ортогональные системы векторов. Ряды Фурье по ортогональной системе векторов, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Ортонормированные базисы. Изоморфизм гильбертовых пространств одинаковой размерности.

Раздел 3. Введение в комплексный анализ. Дифференциальное исчисление функций комплексного переменного.

Поле C комплексных чисел. Множество комплексных чисел как банахово пространство. Окрестности. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Стереографическая проекция. Последовательности комплексных чисел. Ряды комплексных чисел. Комплекснозначные функции действительной переменной и кривые на комплексной плоскости; дифференцирование и интегрирование комплекснозначных функций действительной переменной. Функция комплексной переменной; её действительная и мнимая части, геометрическое истолкование; предел, непрерывность.

Дифференцируемые функции комплексной переменной. Производная. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции комплексной переменной (в точке, в области; определение в терминах дифференцируемости). Гармонические функции и их связь с аналитическими.

Раздел 4. Элементы теории рядов и интегральное исчисление функций комплексного переменного.

Последовательности и ряды функций комплексной переменной. Степенные ряды: круг и радиус сходимости. Дифференцирование степенных рядов. Определение аналитической функции как суммы степенного ряда. Равносильность двух определений аналитической функции. Неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.

Экспонента, тригонометрические и гиперболические функции в комплексной области, связь между ними. Дробно-линейная функция. Многозначные функции. Понятие римановой поверхности. Логарифмическая функция в комплексной области. Степень с произвольным комплексным показателем. Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции.

Интеграл от функции комплексной переменной по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Первообразная и интеграл. Интегральная формула Коши. Ряды Тейлора и ряды Лорана и их области сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек. Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Вычет аналитической функции. Вычисление вычетов и их приложение к вычислению интегралов.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения проверочных и лабораторных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме подготовки к устным выступлениям (комментирование решения задач домашних заданий, итоговой контрольной работы, творческого задания; доклады по темам индивидуальных и групповых проектов, рефератов).

ОС-9 Итоговая контрольная работа 1 (9 семестр)

Примерное содержание итоговой контрольной работы

1. Докажите, что круг, как множество точек плоскости равномощен кругу с выколотым центром.
2. Найдите мощность множества многочленов, не имеющих действительных корней.
3. Найдите мощность множества бесконечных десятичных дробей, в записи которых не встречается цифра 1.
4. Найдите мощность множества чётных числовых функций.
5. Найдите расстояние между функциями $x(t)=t^3$, $y(t)=3t+4$ в метрическом пространстве $C[0;2]$, $C_1[0;2]$, $C_2[0;2]$.

6. Найдите предел последовательности $x_n(t)=\dfrac{\sin(nt)}{n}$ или докажите, что она расходится в пространстве непрерывных функций $C[-\pi;\pi]$.
7. Найдите внутренность, замыкание, производное множество, множество изолированных точек, границу множества A в метрическом пространстве (M, ρ). Является ли множество A открытым, замкнутым, совершенным, всюду плотным в пространстве (M, ρ)? $(M,\rho)=m$, A – множество финитных последовательностей.
8. Проверьте, является ли отображение $F:C[a,b]\to R$, где $F(y)=\max\limits_{a\le x\le b} y(x)$ – непрерывным?
9. Докажите, что последовательность $x_n=\dfrac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}, x_0=1$ имеет предел и найдите его.
10. Что представляет собой шар $\|x\|\le 1$ на плоскости с нормой R_1^2.
11. Что представляет собой шар $\|x\|\le 1$ на плоскости с нормой, порождённой скалярным произведением: $(a,b)=a_1\cdot b_1$, где $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$.
12. Разложите функцию $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<l/2, \\ l-x, & l/2\le x\le l \end{cases}$, на заданном отрезке в тригонометрический ряд Фурье, если известно, что $f(-x)=-f(x)$. Напишите равенство Парсеваля.

    Ответы: $\dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$.

ОС-10 Итоговая контрольная работа 2 (10 семестр)

1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.
2. Представить в алгебраической форме число $\mathrm{Ln}\,(-1-i)$.
3. Представить в алгебраической форме число $\mathrm{Arcth}\left(\dfrac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right)$.
4. Вычертить область, заданную неравенствами: $|z-1+i|\ge 1,\ \mathrm{Re}\,z<1, \mathrm{Im}\,z\le -1$.
5. Определить вид кривой $z(t)=4\mathrm{cosec}\ t-i2\mathrm{ctg}\ t$.
6. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x,y)=3x^2y-y^3$ и значению $f(0)=1$.
7. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного $\int\limits_{ABC}(z^2+1)dz$ по данной кривой: $ABC-ломанная$, $z_A=0,\ z_B=-1+i, z_C=i$.
8. Найти все лорановские разложения функции $f(z)=\dfrac{z+2}{z+z^2+2z^3}$ по степеням z
9. Функцию $f(z)=z\cos\pi\dfrac{z+3}{z-1}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$.
10. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $f(z)=ze^{\frac{4}{z^3}}$.

11. Для функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$ найти изолированные особые точки и определить их тип.

12. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\left|z+\frac{3}{2}\right|=1} \dfrac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}dz$.

13. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{z^2+\cos z}{z^3}dz$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{\sqrt{15}\sin t-4}$.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: материалы контрольных работ, индивидуальных и групповых заданий, итоговой контрольной работы. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
1.	**Оценочные средства для текущей аттестации** ОС-1 Контрольная работа ОС-2 Индивидуальное / групповое задание ОС-3 Индивидуальное / групповое задание ОС-4 Индивидуальное / групповое задание ОС-5 Индивидуальное / групповое задание ОС-6 Индивидуальное / групповое задание ОС-7 Индивидуальное / групповое задание ОС-8 Индивидуальное /	ОР-1. Знает о взаимосвязи инструментария и модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле ОР-2. Умеет отбирать и применять адекватные инструменты для решения модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле ОР-3. Владеет способностью систематизировать результаты решения модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле ОР-4. Знает инструментальные возможности функционального и комплексного анализа для решения задач математического анализа и элементарной математики ОР-5. Умеет применять инструменты функционального и комплексного анализа

	групповое задание ОС-9 Итоговая контрольная работа 1 (9 семестр) ОС-10 Итоговая контрольная работа 2 (10 семестр)	для решения задач математического анализа и элементарной математики ОР-6. Знает о прикладном характере математических моделей, построенных на основе теории функций вещественной и комплексной переменной и возможностях их использования для формирования просветительских запросов обучающихся ОР-7. Умеет осмысливать прикладной характер математических моделей, построенных на основе теории функций вещественной и комплексной переменной и использовать их возможности для формирования просветительских запросов обучающихся. ОР-8. Владеет способностью организовывать интеграцию результатов решения модельных задач различных разделов математического анализа в широком смысле в единую систему знаний
2.	**Оценочные средства для промежуточной аттестации** ОС-11 Зачет в форме устного собеседования ОС-12 Экзамен в форме устного собеседования / Итоговый тест	

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-1 Контрольная работа

1. Докажите счетность множества рациональных чисел любого отрезка [a;b].
2. Какую мощность имеет множество всех точек непрерывной кривой $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$.
3. Пусть $X = R$ – множество действительных чисел. Является ли следующая функция $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$ метрикой на данном множестве?
4. Выясните, к какой точке сходится последовательность точек $M_n\left(\frac{n-1}{n}, \frac{2n}{n+1}\right)$ покоординатно. Сходится ли эта последовательность к указанной точке в пространстве R_2^2, R_1^2, R_∞^2?
5. Проверьте, задает ли следующая функция $f(\bar{a}) = |x| + |y|$ норму на множестве векторов плоскости $\bar{a}(x, y)$.
6. Пусть X - множество векторов на плоскости: $\bar{a}(a_1, a_2)$, $\bar{b}(b_1, b_2)$. Задаёт ли следующая формула $(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + 2a_2 b_2$ скалярное произведение на данном множестве?
7. Найдите неподвижные точки отображения $z = f(y) = y^2(x) - y(x) - x^2$, $y \in C[a, b] \xrightarrow{f} z \in C[a, b]$.
8. Является ли отображение $f : (x, y) \to (u, v)$, где $\begin{cases} u = 0{,}2x + 0{,}4y + 7 \\ v = -0{,}3x - 0{,}6y - 15 \end{cases}$ множества R^2 в себя, сжимающим, если R^2 рассматривается как метрическое пространство R_1^2, R_2^2, R_∞^2?

9. Докажите, что рекуррентная последовательность $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$ имеет предел и найдите его. Как эту последовательность можно использовать для приближенного вычисления числа $\sqrt{a}$? Какие методы доказательства данного утверждения вам известны?
10. Решите олимпиадную задачу школьной математики с помощью принципа сжимающих отображений. Можете ли вы решить задачу другим способом?

    Вычислите $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$.

ОС-2 Индивидуальное / групповое задание

1. Найдите норму элемента $x=(3;-5;-2)$ в пространствах R_2^3; R_1^3; R_∞^3.
2. Найдите расстояние между элементами $x=(-2;4)$ и $y=(-4;-2)$ в пространстве R_2^2; R_1^2; R_∞^2.
3. Изобразите множество точек плоскости (пространства R^2), расстояние от каждой из которых до точки $A(0;0)$ в два раза больше, чем расстояние до точки $B(3;0)$. Решите задачу в пространствах R_2^2; R_1^2; R_∞^2.
4. Найдите норму функции $y=\frac{1}{5}\left(4x^3-x^4\right)$ в пространствах $C[-1;5]$; $C_1[-1;5]$; $C_2[-1;5]$; $D^1[-1;5]$; $D^2[-1;5]$.
5. Найдите расстояние между элементами $x(t)=t^3$ и $y(t)=3t+4$ в пространствах $C[0;2]$; $C_1[0;2]$; $C_2[0;2]$; $D^1[0;2]$; $D^2[0;2]$.
6. Проверьте, принадлежит ли открытому шару радиуса R=1 с центром в точке O(0,0,0,…) точка $x=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4};-\frac{1}{8};\frac{1}{16};\ldots,\frac{(-1)^n}{2^n};\ldots\right)$ в пространстве R_2^∞; R_1^∞; R_∞^∞.
7. Разложите функцию $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x^2, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$. Найдите значение суммы $S(x)$ ряда. Постройте график функции $S(x)$. Найдите $S(\pi/2)$, $S(5\pi/3)$. В математическом пакете постройте графики первых трёх частичных сумм ряда Фурье. Сравните с графиком функции $S(x)$.

Ответ: $\frac{\pi^2}{6}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$,

$$S(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x^2, & 0\le x<\pi,\\ \pi^2/2, & x=\pm\pi\end{cases}$$

8. Разложите функцию $f(x)=e^{ax}$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[0;\pi]$ по косинусам.

Ответ: $\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot e^{a\pi}-1}{a^2+n^2}\cos nx$

ОС-3 Индивидуальное / групповое задание

1. Решите уравнение. Изобразите решение на комплексной плоскости.
   $z^4+16=0$; $z^2+|z|=0$; $z+|z|=2+i$.
2. Изобразите и опишите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданным условиям: $Rez>-1$; $|\operatorname{Im} z|\le 2$; $3\le|z+2-i|<6$.
3. Выясните, какая линия задается на комплексной плоскости комплекснозначной функцией действительного аргумента. Изобразите линию.
   $z=t^2+it$, $-\infty<t<+\infty$; $z=2it$, $-1\le t\le 1$; $z=-3i+e^{it}$, $3\pi<t\le 5\pi$.
4. Выделите действительную и мнимую части функции $w=f(z)$:
   $w=\dfrac{z-i}{z+i}$; $w=\overline{z^2}+|z|^2$.
5. Представьте функцию $w=w(x,y)$ как функцию $w=f(z)$ переменного $z=x+iy$:
   $w=\dfrac{y-ix}{x^2+y^2}$; $w=y^3-3x^2y+y+i(x^3-3xy^2-x)$.
6. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$ по заданной действительной или мнимой части.
   $v(x,y)=x^3-3xy^2$; $u(x,y)=xe^x\cos y-(y+1)e^x\sin y$, $f(0)=i$.

ОС-4 Индивидуальное / групповое задание

1. Найдите линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами i, $1+2i$, $3i$ на подобный ему треугольник с вершинами $1-i$, $2-2i$, $3-i$. Решение сопроводите иллюстрацией.
   Ответ: $w=-i(z+1)$.
2. Найдите дробно-линейную функцию, которая отображает точки 0, 1, ∞ плоскости z соответственно в точки -1, 0, 1 плоскости w.
   Ответ: $w=\dfrac{z-1}{z+1}$.
3. Найдите образ линии при отображении $w=\dfrac{1}{z}$. Решение сопроводите иллюстрацией.
   a) прямая $y=x$; b) прямая $y=2$; c) окружность $(x-1)^2+y^2=1$.
   Ответ: a) прямая $y=-x$; b) окружность $x^2+\left(y+\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$; c) прямая $x=\dfrac{1}{2}$.
4. Начертите график функции $y=f(x)$.
   a) $f(x)=|\sin ix|$; b) $f(x)=|e^{ix}|$.
5. Решите уравнение.
   a) $\sin z=2$; b) $\cos z=0$.
   Ответ: a) $z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$, $k\in Z$; b) $z=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.
6. Вычислите и покажите несколько значений на комплексной плоскости.
   a) $\operatorname{Ln}(1+i)$; b) $\operatorname{Ln}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.
   Ответ: a) $\ln\sqrt{2}+i\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)\approx 0{,}3645+i\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$;

b) $\ln 2 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \approx 0{,}6931 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

7. Вычислите и представьте ответ в показательной форме.

   a) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; b) 1^{-i}; c) i^{i}; d) $(-1)^{i}$.

Ответ: a) $e^{\frac{\pi}{4}-2\pi k}\, e^{i\left(2\pi k-\frac{\pi}{4}\right)}$, $k \in Z$; b) $e^{2\pi k}$, $k \in Z$; c) $e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k \in Z$; d) $e^{\pi+2\pi k}$, $k \in Z$.

ОС-5 Индивидуальное / групповое задание

1. Вычислите интегралы, представив их в виде криволинейных интегралов второго рода.

   a) $\int\limits_{\Gamma} |z|^2 dz$, Γ – окружность $|z| = 1$, обходится против часовой стрелки;

   b) $\int\limits_{\Gamma} z \operatorname{Re} z\, dz$, Γ – окружность $|z| = 1$, обходится в направлении часовой стрелки;

   c) $\int\limits_{\Gamma} z \operatorname{Im} z^2 dz$, Γ – нижняя полуокружность $|z| = 1$, обходится в направлении часовой стрелки;

   d) $\int\limits_{\Gamma} e^{|z|^2} \operatorname{Re} z\, dz$, Γ – отрезок прямой от точки $z_0 = 0$ до точки $z_1 = 1 + i$;

Ответы: a) 0; b) 0; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right)(1+i)$.

2. Вычислите интегралы, задавая путь интегрирования параметрическим уравнением.

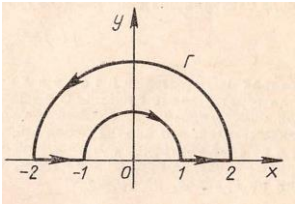
   a) $\int\limits_{\Gamma} |z| dz$,

      1) Γ – прямолинейный отрезок $z_0 = -1$ до точки $z_1 = 1$;

      2) Γ – нижняя полуокружность $|z| = 1$ с началом в точке $z_0 = -1$;

   b) $\int\limits_{\Gamma} z\, dz$, Γ – замкнутый контур, образованный дугой параболы $y = -x^2 + 1$ и отрезком оси абсцисс, обходится против часовой стрелки;

   c) $\int\limits_{\Gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz$, Γ – контур, изображенный на рисунке.



Ответы: a) 1) 1; 2) 2; b) 0; c) 4.

3. Вычислите интегралы (путь интегрирования обходится в положительном направлении).

3.1. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z}$, a) $\Gamma : |z - 2i| = 1$; b) $\Gamma : |z + i| = 2$.

3.2. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}$, a) $\Gamma : |z - 2i| = 2$; b) $\Gamma : |z + 2i| = 2$.

Ответы: 1. a) 0; b) $2\pi i$; 2. a) π; b) $-\pi$.

4. Вычислите интегралы.

   a) $\int\limits_{i}^{1} \left(3z^4 - 2z^3\right) dz$; b) $\int\limits_{-i}^{0} z \cos z\, dz$; c) $\int\limits_{1-i}^{1+i} \frac{dz}{z}$; d) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, выбрать ту ветвь функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{-1} = i$.

Ответы: a) $\frac{3}{5}(1-i)$; b) $1+\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1$; c) $\frac{\pi i}{2}$; d) $2(1-i)$.

5. Вычислите интегралы, используя интегральную формулу Коши (окружности обходятся в положительном направлении).

5.1. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{(z+i)^4}{2z-i}dz$, a) $\Gamma:|z|=1$; b) $\Gamma:|z-1|=1$.

5.2. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+1}$, a) $\Gamma:|z-i|=1$; b) $\Gamma:|z+i|=1$.

Ответы: 1. a) $\frac{81}{16}\pi i$; b) 0; 2. a) π; b) $-\pi$.

6. Вычислите интегралы, используя интегральную формулу Коши для производных.

6.1. a) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2}dz$; b) $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^3}dz$.

6.2. a) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{(z^2+1)^2}$; b) $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{dz}{(z^2+1)^2}$.

Ответы: 1. a) $2\pi i$; b) $-\pi\operatorname{sh}1$; 2. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $-\frac{\pi}{2}$.

ОС-6 Индивидуальное / групповое задание

1. Найдите круг сходимости степенного ряда.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{3^n}z^n$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+i)^n}{3^{n+1}\cdot 2^{n-1}}$.

Ответ: a) $|z|<3$; b) $|z+i|<6$.

2. Разложите функцию $f(z)$ в ряд по степеням $z-a$. Определите круг сходимости ряда.

a) $f(z)=e^{2z}$, $a=i$; b) $f(z)=\frac{1}{z+4}$, $a=-1$.

Ответ: a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{2i}\frac{2^n}{n!}(z-i)^n$, $|z|<\infty$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z+1)^n$, $|z+1|<3$.

3. Найдите область сходимости ряда.

a) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+1}$; b) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}(z-i)^n$.

Ответ: a) $1<|z|<3$; b) $|z-i|>1$.

4. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

a) $f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$, $0<|z|<1$; b) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$, $0<|z|<\infty$.

Ответ: a) $\sum\limits_{n=-1}^{\infty}z^n$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{n-3}}$.

5. Найдите все возможные разложения функции $f(z)=\frac{1}{z^2-4z+3}$ в ряд Лорана по степеням a) $z-1$; b) z.

Ответ: a) $-\frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}$ при $0<|z-1|<2$, $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}$ при $|z-1|>2$;

b) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$ при $|z|<1$, $\frac{1}{2}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n\right]$ при $1<|z|<3$, $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}(3^n-1)$ при $|z|>3$.

6. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки и укажите область сходимости ряда.

   a) $f(z)=\frac{z^3}{z^2-2z+1}$; b) $f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$.

   Ответ: a) $z+2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{z^n}$, $1<|z|<+\infty$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-3}}{(2n)!}$, $0<|z|<+\infty$.

ОС-7 Индивидуальное / групповое задание

1. Является ли точка $z=z_0$ изолированной особой точкой функции $w=f(z)$?

   а) $f(z)=\cos\frac{1}{z-1}$, $z_0=1$; б) $f(z)=\sec\frac{1}{z-1}$, $z_0=1$.

   Ответ: а) да; б) нет;

2. Является ли точка $z=\infty$ изолированной особенностью функции $w=f(z)$?

   а) $f(z)=\frac{\sin z}{z^5-1}$; б) $f(z)=\frac{1}{\sin z}$.

   Ответ: а) да; б) нет; в) да; г) нет.

3. Определите неизолированную особую точку $z=\tilde{z}$ функции $w=f(z)$ и укажите последовательность особых точек $\{z_k\}$, для которой $z=\tilde{z}$ является предельной точкой.

   а) $f(z)=\mathrm{tg}\frac{1}{z-1}$; б) $f(z)=\frac{1}{\cos\pi z}$.

   Ответ: а) $\tilde{z}=1$, $\{z_k\}=\left\{1+\frac{2}{\pi(1+2k)}\right\}$; б) $\tilde{z}=\infty$, $\{z_k\}=\left\{k+\frac{1}{2}\right\}$; в) $\tilde{z}=0$, $\{z_k\}=\left\{\frac{1}{\pi k}\right\}$.

   Всюду $k\in Z$.

4. Найдите все изолированные особые точки z функции $w=f(z)$. Учитывая поведение функции в окрестности особой точки, установите её характер. В случае, когда особая точка является полюсом, определите его порядок.

   а) $f(z)=\frac{z^3-1}{(z+2)^2(z-3)}$; б) $f(z)=\frac{1}{z^2-4}e^{\frac{1}{z-2}}$.

   Ответ: а) $z_0=-2$ - полюс 2-го порядка, $z_1=3$ - простой полюс, $z_2=\infty$ - устранимая особая точка; б) $z_0=2$ - существенно особая точка, $z_1=-2$ - простой полюс, $z_2=\infty$ - устранимая особая точка.

5. Найдите все изолированные особые точки z функции $w=f(z)$. Учитывая разложение функции в ряд Лорана в окрестности особой точки, установите её характер. В случае, когда особая точка является полюсом, определите его порядок.

   а) $f(z)=\sin z+\sin\frac{1}{z}$; б) $f(z)=\frac{e^z-1}{z}$; в) $f(z)=\frac{\sin z}{z}$; г) $f(z)=\frac{\cos z}{z^2}$;

Ответ: а) $z_0 = 0$, $z_1 = \infty$ - существенно особые точки; б) $z_0 = 0$ - устранимая особа точка, $z_1 = \infty$ - существенно особая точка; в) $z_0 = 0$ - устранимая особа точка, $z_1 = \infty$ - существенно особая точка; г) $z_0 = 0$ - полюс 2-го порядка, $z_1 = \infty$ - существенно особая точка.

ОС-8 Индивидуальное / групповое задание

1. Найдите вычеты функции $w = f(z)$ во всех её особых точках.

   а) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$; б) $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$; в) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z-3)}$; г) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^5}$;

   д) $f(z) = \dfrac{z^4}{z^4+1}$; е) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$; ж) $f(z) = \dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$; з) $f(z) = \dfrac{1-\sin z}{(2z-\pi)^2}$.

   Ответ: а) $\operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z) = 1$; $\operatorname{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = -1$; б) $\operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z) = \dfrac{1}{2}$; $\operatorname{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = -\dfrac{1}{2}$;

   в) $\operatorname{Res}\limits_{z=i} f(z) = -\dfrac{1-3i}{20}$; $\operatorname{Res}\limits_{z=-i} f(z) = -\dfrac{1+3i}{20}$; $\operatorname{Res}\limits_{z=3} f(z) = \dfrac{1}{10}$; $\operatorname{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$;

   г) $\operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z) = 1$; $\operatorname{Res}\limits_{z=1} f(z) = -\dfrac{1}{2}$; $\operatorname{Res}\limits_{z=-1} f(z) = -\dfrac{1}{2}$; $\operatorname{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$;

   д) $\operatorname{Res}\limits_{z_k} f(z) = \dfrac{z_k}{4}$, $z_k = e^{\frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{2}k}$, $k = 0,1,2,3$; $\operatorname{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$;

   е) $\operatorname{Res}\limits_{z_k} f(z) = 1$, $z_k = 2\pi k i$, $k \in Z$; ж) $\operatorname{Res}\limits_{z_k} f(z) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{\pi^2 k^2}$, $z_k = \dfrac{1}{\pi k}$, $k \in Z$;

   з) $\operatorname{Res}\limits_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = 0$.

2. Вычислите контурный интеграл, применяя основную теорему о вычетах.

   а) $\oint\limits_{|z-1|=3} \dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z+1)^2} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$; в) $\oint\limits_{|z-i|=1} \dfrac{z^2-1}{z^2+1} dz$; г) $\oint\limits_{|z+i|=2} \dfrac{e^z}{z} dz$;

   д) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{z^3}{z^{20}-1} dz$; е) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z^9}{z^5-1} dz$; ж) $\oint\limits_{|z|=1} \sin\dfrac{1}{z} dz$; з) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{z+1}{e^z+1} dz$.

   Ответ: а) 0; б) 0; в) -2π; г) $2\pi i$; д) 0; е) $-2\pi i$; ж) $2\pi i$; з) $-4\pi i$; и) $2\pi i$; к) 0.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-11 Зачет в форме устного собеседования

Программа зачета

Раздел 1. Элементы теории множеств

1. Множества в теории Г. Кантора. Эквивалентные (равномощные) множества. Понятие мощности множества.
2. Конечные множества. Мощность объединения конечных множеств. Мощность декартова произведения конечных множеств. Мощность булеана конечного множества.

3. Счетные множества. Мощность счетного множества как наименьшая из бесконечных мощностей. Мощность объединения конечного набора счетных множеств, счетного набора конечных множеств, счетного набора счетных множеств. Мощность декартова произведения конечного набора счетных множеств. Мощность множества рациональных чисел. Мощность множества алгебраических чисел.
4. Несчетность множества чисел отрезка [0;1]. Множества мощности континуум. Множества мощности гиперконтинуум.
5. Мощность объединения конечного набора множеств мощности континуум, счетного набора множеств мощности континуум. Мощность объединения, разности множества мощности континуум и счетного множества. Мощность декартова произведения конечного набора множеств мощности континуум. Мощность объединения континуума множеств мощности континуум.
6. Сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна. Теорема Кантора (сравнение мощности множества и его булеана). Бесконечность шкалы мощностей (кардинальных чисел).

Раздел 2. Начала функционального анализа

7. Понятие метрического пространства. Важнейшие примеры метрических пространств.
8. Сходимость последовательности точек в метрическом пространстве. Единственность предела. Сходимость и ограниченность. Сходимость в важнейших метрических пространствах.
9. Внутренние точки, точки прикосновения, предельные точки, изолированные точки, граничные точки множества в метрическом пространстве. Внутренность, замыкание, производное множество, граница множества в метрическом пространстве. Открытые, замкнутые, совершенные множества.
10. Строение открытых, замкнутых, совершенных множеств в пространстве действительных чисел. Канторово совершенное множество.
11. Фундаментальные последовательности точек метрического пространства. Сходимость и фундаментальность. Полные метрические пространства. Пополнение метрического пространства. Примеры.
12. Непрерывные отображения метрических пространств. Сжимающие отображения метрических пространств. Непрерывность сжимающего отображения.Неподвижные точки отображения метрического пространства в себя. Принцип сжимающих отображений (теорема Банаха).
13. Понятие нормированного пространства. Метрика в нормированном пространстве. Банаховы пространства. Примеры.
14. Понятие пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Норма и метрика в пространстве со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Примеры.
15. Ортогональные векторы в гильбертовом пространстве. Теорема Пифагора. Ряд Фурье по ортогональной системе векторов. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
16. Ортогональные и ортонормированные базисы в гильбертовом пространстве. Изоморфизм счетномерных гильбертовых пространств.

ОС-12 Экзамен в форме устного собеседования

Программа экзамена

Раздел 3. Введение в комплексный анализ. Дифференциальное исчисление функций комплексного переменного

1. Множество комплексных чисел. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана и стереографическая проекция.

2. Функции комплексного аргумента: действительная и мнимая часть, предел, непрерывность, примеры.
3. Производная функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана дифференцируемости функции комплексной переменной. Определение аналитической функции.
4. Определение аналитической функции. Гармонические функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части.
5. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной. Конформные отображения.

Раздел 4. Элементы теории рядов и интегральное исчисление функций комплексного переменного.

6. Интеграл комплекснозначной функции комплексной переменной вдоль кривой: определение, сведение к криволинейному интегралу второго рода.
7. Интегральная теорема Коши для односвязной области, ее следствия.
8. Независимость интеграла аналитической функции от пути интегрирования. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница.
9. Интегральная теорема Коши для многосвязной области.
10. Интегральная формула Коши.
11. Экспонента в комплексной области и ее свойства.
12. Синус и косинус комплексного аргумента, их свойства. Формулы Эйлера.
13. Гиперболические функции в комплексной области. Связь между синусом и косинусом и гиперболическими функциями в комплексной плоскости.
14. Логарифмическая функция в комплексной области.
15. Определение степени с комплексным показателем. Степенная функция в комплексной области. Радикал, главная ветвь радикала. Показательная функция – как многозначная функция в комплексной плоскость.
16. Обратные тригонометрические функции в комплексной области.
17. Степенные ряды в комплексной области: область сходимости, радиус сходимости. Ряд Тейлора аналитической функции. Разложение аналитической функции в степенной ряд. Второе определение аналитической функции. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.
18. Ряды Лорана: область сходимости. Разложение функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана.
19. Изолированные особые точки аналитической функции. Лорановское разложение функции в окрестности изолированной особой точки. Классификация изолированных особых точек. Бесконечность как особая точка аналитической функции.
20. Вычеты аналитической функции. Теорема о вычетах. Теорема о полной сумме вычетов.
21. Вычисление вычетов аналитической функции в простых и кратных полюсах.
22. Применение вычетов к вычислению интегралов.

ОС-12. Итоговый тест

1. Мощность множества натуральных чисел, кратных трем, равна…

   А. $\frac{a}{3}$
   Б. a
   В. c
   Г. гиперконтинуум

2. Мощность множества окружностей, у которых радиус выражается целым числом, а координаты цента – пара натуральных чисел, равна…

А. $\frac{a}{3}$
Б. a
В. c
Г. гиперконтинуум

3. Найдите расстояние между функциями $y(x) = x^2$ и $y(x) = 2x$ в метрическом пространстве $C[0;2]$.

А. 2
Б. $\frac{4\sqrt{15}}{15}$
В. $\frac{4}{3}$
Г. 1

4. Найдите расстояние между функциями $y(x) = x^2$ и $y(x) = 2x$ в метрическом пространстве $C_1[0;2]$.

А. 2
Б. $\frac{4\sqrt{15}}{15}$
В. $\frac{4}{3}$
Г. 1

5. Найдите расстояние между функциями $y(x) = x^2$ и $y(x) = 2x$ в метрическом пространстве $C_2[0;2]$.

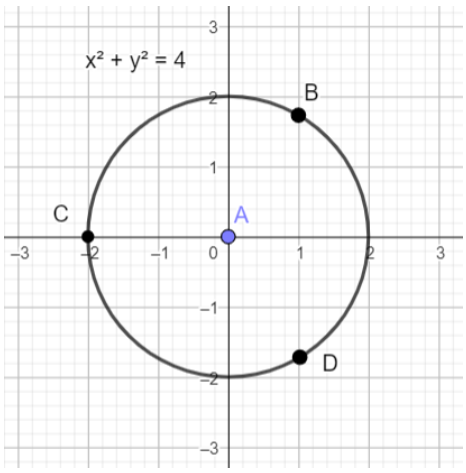
А. 2
Б. $\frac{4\sqrt{15}}{15}$
В. $\frac{4}{3}$
Г. 1

6. Найдите внутренность, замыкание, производное множество, множество изолированных точек, границу множества $A = (-1;2] \cup \{3\}$ в метрическом пространстве $(M, \rho) = R$.

7. Является ли множество $A = (-1;2] \cup \{3\}$ открытым, замкнутым, совершенным, всюду плотным в пространстве $(M, \rho) = R$)?

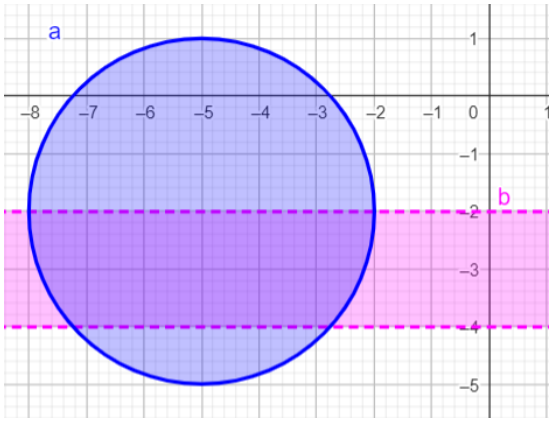
8. Изобразите шар $\|y - y_0\| \leq 1$ в пространстве $C[0;2]$, если $y_0 = y_0(x) = x^2$.

9. На комплексной плоскости показаны результаты извлечения корня…



А. $\sqrt{4}$
Б. $\sqrt[3]{2}$
В. $\sqrt[3]{8}$
Г. $\sqrt[3]{-8}$

10. На комплексной плоскости изображено множество точек, удовлетворяющих условию…



А. $\begin{cases} |z-5-2i| \le 9, \\ |Im\, z+3| < 2 \end{cases}$
Б. $\begin{cases} |z+5+2i| \le 3, \\ |Im\, z+3| < 1 \end{cases}$
В. $\begin{cases} |z-5-2i| \le 3, \\ |Im\, z+3| < 1 \end{cases}$
Г. $\begin{cases} |z+5+2i| \le 9, \\ |Im\, z-5| < 1 \end{cases}$

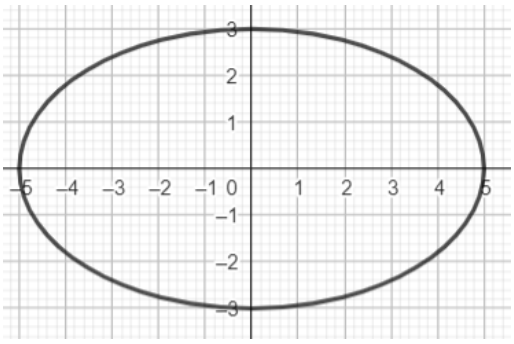
11. Действительная часть комплексного числа $Ln\ 1$ равна…

А. 1
Б. 0
В. $2\pi k,\ k \in Z$
Г. $\frac{\pi k}{2},\ k \in Z$

12. Мнимая часть комплексного числа $Ln\ 1$ равна…

А. 1
Б. 0
В. $2\pi k, k \in Z$
Г. $\frac{\pi k}{2}, k \in Z$

13. Линия на комплексной плоскости является графиком комплекснозначной функции $z(t) = x(t) + iy(t)$ действительного переменного t…



А. $z = 3\cos t + 5i\sin t, t \in [0; 2\pi]$
Б. $z = 5\cos t + 3i\sin t, t \in [0; 2\pi]$
В. $z = 3\cos t - 5i\sin t, t \in [0; 2\pi]$
Г. $z = 5\cos t - 3i\sin t, t \in [0; 2\pi]$

14. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x, y) = 8xy + x$ и значению $f(0) = 0$.

15. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного $\int(z+1)dz$ по контуру $ABC - ломанная$, $z_A = 0, z_B = -1 + i, z_C = i$.

16. Определить тип особой точки $z = 0$ для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Ответы к итоговому тесту

Номер задания	1	2	3	4	5
Вариант ответа	Б	Б	Г	В	Б
Номер задания	9	10	11	12	13
Вариант ответа	Г	Б	Б	В	Б

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования баллов, набранных в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

9 семестр	Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачет	Итоговая сумма баллов
	$1 \times 6 = 6$	$1 \times 10 = 10$	152	32	200
10 семестр	Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен	Итоговая сумма баллов
	$1 \times 9 = 9$	$1 \times 15 = 15$	212	64	300

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 9 семестра

Результат	Баллы (3 ЗЕ)
«зачтено»	151-300 баллов
«не зачтено»	0-150 баллов

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 10 семестра

Результат	Баллы (3 ЗЕ)
«отлично»	271-300 баллов
«хорошо»	211-270 баллов
«удовлетворительно»	151-210 баллов
«неудовлетворительно»	0-150 баллов

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий (9 семестр)

Занятие 1. Равномощные множества

Материал для освоения

1. Эквивалентные (равномощные) множества.
2. Понятие мощности множества.
3. Геометрическое и аналитическое доказательство равномощности двух множеств.

Занятие 2-3. Счетные множества

Материал для освоения

1. Конечные множества и операции над ними; мощность. Связь с комбинаторными задачами.
2. Мощность булеана конечного множества.
3. Счетные множества.
4. Доказательство счетности множества.

Занятие 4-5. Множества мощности континуум

Материал для освоения

1. Множества мощности континуум на числовой прямой, на координатной плоскости.
2. Доказательство континууальности множества.
3. Множество Кантора.

Занятие 6-7. Метрические пространства

Материал для освоения

1. Важнейшие примеры метрических пространств.
2. Сходимость последовательности точек в метрическом пространстве.
3. Строение точечных множеств в метрическом пространстве.
4. Непрерывные отображения метрических пространств.
5. Сжимающие отображения метрических пространств.

Занятие 8. Нормированные пространства

Материал для освоения

1. Понятие нормированного пространства.
2. Примеры нормированных пространств.
3. Метрика в нормированном пространстве.
4. Банаховы пространства. Примеры.

Занятие 9-10. Пространства со скалярным произведением
Материал для освоения

1. Понятие пространства со скалярным произведением.
2. Неравенство Коши-Буняковского.
3. Норма и метрика в пространстве со скалярным произведением.
4. Гильбертовы пространства. Примеры.
5. Ортогональные векторы в гильбертовом пространстве.

Планы практических занятий (10 семестр)

Занятие 1-2. Введение в анализ на комплексной плоскости
Материал для освоения

1. Окрестность точки на комплексной плоскости. Расширенная комплексная плоскость.
2. Последовательности комплексных чисел.
3. Ряды комплексных чисел.
4. Комплекснозначные функции действительного аргумента.
5. Линии и области на комплексной плоскости.

Занятие 3-4. Функции комплексного аргумента и их дифференцирование
Материал для освоения

1. Функции комплексного аргумента: действительная и мнимая часть, предел, непрерывность, примеры.
2. Отображения задаваемые функциями комплексного аргумента и их наглядная интерпретация.
3. Производная функции комплексной переменной как предел.
4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной.

Занятие 5-6. Аналитические функции
Материал для освоения

1. Определение аналитической функции.
2. Гармонические функции.
3. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части.
4. Линейная и дробно-линейная функции на комплексной плоскости.
5. Конформные отображения.

Занятие 7-9. Интегрирование на комплексной плоскости
Материал для освоения

1. Интеграл комплекснозначной функции действительной переменной вдоль кривой: определение, сведение к определенному интегралу по параметру.
2. Интеграл комплекснозначной функции комплексной переменной вдоль кривой: определение, сведение к криволинейному интегралу второго рода.
3. Независимость интеграла аналитической функции от пути интегрирования.
4. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница на комплексной плоскости.
5. Интегральная теорема Коши для односвязной области, ее следствия.
6. Интегральная теорема Коши для многосвязной области.
7. Интегральная формула Коши.

Занятие 10-12. Элементарные функции на комплексной плоскости

Материал для освоения

1. Экспонента.
2. Синус и косинус. Эйлера.
3. Гиперболические функции. Связь между синусом и косинусом и гиперболическими функциями в комплексной плоскости.
4. Логарифмическая функция.
5. Степенная функция.
6. Радикал, главная ветвь радикала.
7. Показательная функция.
8. Обратные тригонометрические функции.
9. Обратные гиперболические функции.

Занятие 13-15. Степенные ряды на комплексной плоскости

Материал для освоения

1. Ряд Тейлора.
2. Ряд Лорана.
3. Изолированные особые точки аналитической функции.
4. Лорановское разложение функции в окрестности изолированной особой точки.
5. Бесконечность как особая точка аналитической функции.
6. Вычеты аналитической функции.
7. Вычисление вычетов аналитической функции в простых и кратных полюсах.
8. Применение вычетов к вычислению интегралов.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Быкова, О. Н. Теория функций действительного переменного: Учебное пособие / Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. - Москва : КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 196 с. ISBN 978-5-905554-21-6. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/520537. – Режим доступа: по подписке.
2. Геворкян, Э. А. Теория функций комплексной переменной : учебное пособие / Э. А. Геворкян, А. С. Фокст. – Москва : Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2004. – 164 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90747. – Текст : электронный.
3. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной: учебник / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов, - 6-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 336 с.: ISBN 978-5-9221-0133-2. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/544573. – Режим доступа: по подписке.
4. Ульянов, П. Л. Действительный анализ в задачах [Электронный ресурс] / П. Л. Ульянов, А. Н. Бахвалов, М. И. Дьяченко и др. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 416 с. - ISBN 5-9221-0595-7. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/544632. – Режим доступа: по подписке.

Дополнительная литература

1. Малышева, Н. Б. Функции комплексного переменного [Электронный ресурс] : Учеб. для вузов./ Н. Б. Малышева, Э. Р. Розендорн ; Под ред. Э. Р. Розендорна. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 168 с. - ISBN 978-5-9221-0977-2. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/544726. – Режим доступа: по подписке.
2. Натансон, И. П. Основы теории функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – Ленинград : Издательство Ленинградского Университета, 1941. – 296 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=102622. – ISBN 978-5-4460-7408-2. – Текст : электронный.
3. Треногин, В. А. Функциональный анализ : учебник / В. А. Треногин. – 3-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2002. – 488 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82613. – ISBN 5-9221-0272-9. – Текст : электронный.

Программные продукты

1. GeoGebra Classic
2. Microsoft Office Excel

Лист согласования рабочей программы
учебной дисциплины

Направление подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование
Профиль: Математика. Иностранный язык
Рабочая программа Дополнительные вопросы математического анализа
Составитель: О.В. Макеева – Ульяновск: УлГПУ, 2023.

Программа составлена с учетом федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль подготовки «Математика. Иностранный язык» утверждённого Министерством образования и науки Российской Федерации, и в соответствии с учебным планом.

Составители _____ О.В. Макеева (подпись)

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) одобрена на заседании кафедры высшей математики "23" мая 2023г., протокол № 10
Заведующий кафедрой
_____ И.В. Столярова 23.05.23
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) согласована с библиотекой
Сотрудник библиотеки
_____ Ю.Б. Марсакова 22.05.23
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Программа рассмотрена и одобрена на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования "26" мая 2023 г., протокол № 5
Председатель ученого совета факультета физико-математического и технологического образования
_____ Е.М. Громова 26.05.23
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*