Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
25 июня 2021 г.

МНОГОМЕРНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Программа учебной дисциплины Предметно-методического модуля

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Иностранный язык

(очная форма обучения)

Составители: Сибирева А.Р., к.ф.-м.н, доцент, доцент кафедры высшей математики;
Фолиадова Е.В., к.ф.-м.н, доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Многомерный математический анализ» относится к дисциплинам обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) Предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Иностранный язык», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках школьного курса «Алгебра и начала математического анализа» или соответствующих дисциплин среднего профессионального образования. Изучение дисциплины взаимосвязано с рядом дисциплин учебного плана: («Алгебра», «Геометрия»), а также иными математическими дисциплинами базовой и вариативной частей программы, изучение дисциплины является продолжением дисциплины «Анализ функций одной переменной». Курс математического анализа дополняется и поддерживается дисциплинами по выбору студента (углубленное изучение отдельных тем и вопросов). Курс математического анализа является предшествующим для дисциплин: «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексной переменной», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Численные методы»; для ряда разделов алгебры (например, теории многочленов) и геометрии (например, дифференциальной геометрии), а также дисциплины по выбору «Дополнительные главы математического анализа».

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин и прохождения практик: Производственная (педагогическая) Преподавательская, Учебная (технологическая) Предметный практикум решения задач по математике.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Цель дисциплины «Многомерный математический анализ» – освоение бакалавром системы базовых понятий, идей и методов классического математического анализа, формирование навыков решения задач, умения оперировать математическим аппаратом, развитие абстрактно-логического мышления, подготовка к преподаванию школьных курсов математики.

Задачи дисциплины связаны с формированием общекультурных и профессиональных компетенций и включают формирование логической и алгоритмической культуры, системных знаний по базовым разделам современной математики, представлений о структуре математического знания в целом.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Многомерный математический анализ» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-12. Способен выделять структурные элементы, входящие в систему познания предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения), анализировать их в			

единстве содержания, формы и выполняемых функций. ПК-12.1. Знает формулировки определений, содержательное значение терминов и понятий предметной области, правила и алгоритмы оперирования с объектами предметной области, понимает взаимосвязь между структурными элементами; имеет представление о функциях и практическом применении изучаемых объектов. ПК-12.2. Умеет выделять и анализировать структурные элементы, входящие в систему познания предметной области; определять логическую взаимосвязь между компонентами предметной области; строить логически верные и обоснованные рассуждения; решать задачи предметной области. ПК-12.3. Владеет профессиональной терминологией и основами профессиональной речевой культуры; методами доказательных рассуждений; методами анализа изучаемых объектов, методами систематизации и структурирования знаний в предметной области, основами	ОР-1. Основные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач	ОР-2 Решать задачи по дисциплине, проводить доказательства, классифицировать и систематизировать основные изучаемые объекты, строить логически верные рассуждения	

моделирования в предметной области.			
ПК-14. Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями ИПК-14.1. Знает роль и возможности применения аппарата предметной области в смежных научных областях, их методологическое и мировоззренческое значение; имеет представление о междисциплинарных связях, научных методах смежных областей ИПК-14.2. Умеет определять роль полученных знаний для смежных областей и для школьного курса, применять полученные знания в решении прикладных задач.	ОР-3. возможности применения полученных сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях	ОР-4. решать задачи школьного курса математики повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине	

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма итоговой аттестации
	Всего		Лекции, час	Лабораторные занятия, час	Практические занятия, час	Самостоятельная работа, час	
	Трудоемкость						
	Зачет. ед.	Часы					
3	3	108	18	-	30	33	экзамен
4	3	108	18	-	30	33	экзамен
Итого:	6	216	36	-	60	66	54

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ п/п	Наименование разделов и тем (с разбивкой на модули)	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа
3-й семестр					
1.	Числовые ряды: основные понятия	2	-	2	6
2.	Числовые ряды: признаки сходимости, действия над рядами.	4	-	8	7
3.	Функциональные последовательности и ряды. Степенные ряды.	4	-	8	6
4.	Тригонометрические ряды	4	-	4	6
5.	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных: основные понятия	4	-	8	8
Итого за 3-й семестр		**18**	**-**	**30**	**33**
4-й семестр					
6.	Экстремумы функций нескольких переменных	4	-	8	9
7.	Кратные интегралы	6	-	8	8
8.	Криволинейные интегралы 1 и 2 рода. Поверхностные интегралы 1 и 2 рода. Элементы векторной теории поля	4	-	6	8
9.	Приложения интегрального исчисления функций нескольких переменных	4	-	8	8
Итого за 4-й семестр		**18**	**-**	**30**	**33**
Всего		**36**	**-**	**60**	**66**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса (3 семестр)

Раздел I. Числовые ряды: основные понятия Числовые ряды. Частичная сумма ряда, сумма ряда, остаток ряда Сходящиеся и расходящиеся ряды. Критерий сходимости ряда в терминах остатков. Геометрическая прогрессия. Необходимое условие сходимости числового ряда. Критерий Коши сходимости числового ряда. Гармонический ряд. Ряды с положительными членами: признаки сходимости (признак сравнения в форме неравенства и в форме эквивалентности, признаки Даламбера и Коши в форме неравенства и в предельной форме, интегральный признак). Семейство обобщённых гармонических рядов.

Раздел II. Числовые ряды: признаки сходимости, действия над рядами

Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница о сходимости знакочередующегося ряда. Оценка остатка знакочередующегося ряда. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов (сочетательное свойство, переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов, теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда, линейность, умножение рядов).

Последовательности комплексных чисел. Ряды комплексных чисел: сумма ряда, остаток ряда, абсолютная и условная сходимость, действия над рядами.

Интерактивные формы: Дискуссионный клуб «Парадоксы теории рядов» (лекция). Блиц-турнир «Сходящиеся и расходящиеся ряды».

Раздел III. Функциональные последовательности и ряды. Степенные ряды

Функциональные последовательности: поточечная и равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей.

Функциональный ряд. Область сходимости функционального ряда. Сумма ряда. Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной и абсолютной сходимости функционального ряда. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость степенных рядов. Непрерывность суммы степенного ряда. Действия над степенными рядами. Единственность разложения функции в степенной ряд.

Ряд Тейлора. Достаточные условия сходимости ряда Тейлора к своей функции. Разложение элементарных функций в ряды Маклорена.. Применение рядов к приближенным вычислениям.

Интерактивная форма: Интерактивная лекция «Действия над функциональными последовательностями и рядами».

Раздел IV. Тригонометрические ряды

Периодические функции и их свойства. Гармонические колебания. Тригонометрические многочлены. Тригонометрические ряды.

Скалярное произведение функций, определенных на отрезке. Ортогональные системы функций. Ряды по ортогональным системам функций: единственность разложения. Ортогональность тригонометрической системы функций на отрезке .. Ряд Фурье функции, определенной на отрезке , достаточные условия его сходимости к своей функции (теорема Дирихле, без доказательства). Ряды Фурье четных и нечетных функций. Разложение функции, определенной на отрезке , в ряд по синусам, в ряд по косинусам. Ряды Фурье на произвольном отрезке. Ряды Фурье в комплексной форме. Равенство Парсеваля. Понятие об интеграле Фурье.

Интерактивная форма: Круглый стол «Гармонический анализ» с элементами защиты творческого задания.

Раздел V. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных: основные понятия

Пространство $\mathbb{R}^n$ как нормированное пространство. Окрестности, предел последовательности, фундаментальные последовательности в пространстве $\mathbb{R}^n$. Понятие полноты пространства; критерий Коши и полнота пространства $\mathbb{R}^n$. Внутренние точки, точки прикосновения, предельные точки, граничные точки множества в пространстве $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$. Связные множества в $\mathbb{R}^n$. Области и замкнутые области в $\mathbb{R}^n$. Ограниченные множества точек в пространстве $\mathbb{R}^n$. Понятие компактного пространства, компакта. Принцип Больцано-Вейерштрасса для пространства $\mathbb{R}^n$, компакты в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Функции нескольких переменных: область определения, линии (поверхности) уровня, способы графического представления функций двух, трех переменных. Предел функции нескольких переменных: определение в терминах окрестностей и в терминах последовательностей. Непрерывность функции нескольких переменных. Теорема Коши о промежуточном значении для функции нескольких переменных, определенной в области. Теорема Вейерштрасса для функции нескольких переменных, определенной на компакте. Векторнозначные функции нескольких переменных: пределы и непрерывность, сведение к исследованию компонент.

Производная функции нескольких переменных в точке по заданному направлению. Частные производные функции нескольких переменных. Геометрический смысл производных по направлению, частных производных функции двух переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных, полный дифференциал. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных; касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной явно. Существование частных производных как необходимое условие дифференцируемости функции в точке. Градиент функции нескольких переменных в точке; производная по направлению как проекция градиента. Направление наискорейшего возрастания функции нескольких переменных, геометрический смысл градиента функции двух, трех переменных. Непрерывность частных производных в точке как достаточное условие дифференцируемости функции в этой точке.

Дифференцируемые вектор-функции нескольких переменных, матрица Якоби. Якобиан и его геометрический смысл (для случая функции двух, трех переменных). Дифференцирование сложной (вектор)-функции нескольких переменных. Инвариантность формы первого дифференциала.

Производные высших порядков функции нескольких переменных. Смешанные производные, условия равенства смешанных производных. Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных, форма n-го дифференциала. Дифференциал второго порядка и гессиан функции нескольких переменных.

Интерактивные формы: Работа в микрогруппах (совместное чтение математического текста). Игра «Веришь-не веришь» на материале дифференциального исчисления функций нескольких переменных.

Краткое содержание курса (4 семестр)

Раздел VI. Экстремумы функций нескольких переменных

Формула Тейлора для функции нескольких переменных.

Теорема о существовании неявной функции. Теорема о дифференцировании неявной функции. Теорема о системе неявных функций. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной неявно, заданной параметрически. Теорема об обратном отображении и его дифференцировании. Понятие диффеоморфизма, свойства диффеоморфизмов.

Зависимые и независимые системы функций в области.

Точки минимума, максимума, строгого минимума, строгого максимума функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума функции нескольких переменных (теорема Ферма). Седловые точки функции нескольких переменных. Достаточные условия экстремума/седловой точки функции нескольких переменных в терминах второго дифференциала, в терминах гессиана Критерий Сильвестра знакоопределенности матрицы (без доказательства). Случай функции двух переменных.

Условный экстремум функции нескольких переменных при одном или нескольких условиях связи. Метод исключения переменных. Метод неопределенных множителей Лагранжа: необходимое условие условного экстремума в терминах лагранжиана, понятие о достаточных условиях условного экстремума.

Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в области. Случай задачи линейного программирования.

Интерактивные формы: Интерактивная лекция «Неявно заданные функции и диффеоморфизмы». Деловая игра «Оптимальные стратегии».

Раздел VII. Кратные интегралы Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Двойной интеграл как предел интегральных сумм, как разделяющее число сумм Дарбу. Достаточные условия существования двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области интегрирования, в случае области, элементарной относительно одной из осей координат. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла. Тройной интеграл как предел интегральных сумм, как разделяющее число сумм Дарбу. Достаточные условия существования тройного интеграла. Свойства тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному в случае интегрирования по прямоугольному параллелепипеду (брусу), в случае области интегрирования, элементарной относительно одной из координатных плоскостей, одной из осей координат. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и в сферических координатах.

Интерактивная форма: Работа в парах с взаимоконтролем.

Раздел VIII. Криволинейные интегралы 1 и 2 рода. Поверхностные интегралы 1 и 2 рода. Элементы векторной теории поля

Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла по длине дуги, по координатам.

Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги) вдоль плоской или пространственной кривой как предел интегральных сумм. Основные свойства криволинейного интеграла первого рода. Сведение криволинейного интеграла первого рода к интегралу Римана.

Криволинейный интеграл второго рода (по координатам) вдоль плоской или пространственной кривой как предел интегральных сумм. Основные свойства криволинейного интеграла второго рода. Сведение криволинейного интеграла второго рода к интегралу Римана. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора плоского контура интегрирования, соединяющего две данные точки плоскости. Первообразная полного дифференциала, интеграл от полного дифференциала как разность значений первообразной.

Задачи, приводящие к понятию поверхностного интеграла по площади поверхности, по координатам.

Ориентируемые (двусторонние) поверхности. Квадрируемые поверхности, площадь поверхности. Понятие о поверхностных интегралах первого и второго рода, их свойствах, их сведении к двойным интегралам.

Формула Остроградского-Гаусса и формула Стокса. Условия независимости поверхностного интеграла второго рода от выбора поверхности, натянутой на данный контур. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора контура интегрирования, соединяющего две данные точки пространства.

Скалярные и векторные поля. Градиент скалярного поля, дивергенция и ротор векторного поля в терминах символического оператора «набла». Дифференциальные операции второго порядка, оператор Лапласа.

Циркуляция векторного поля вдоль кривой. Поток векторного поля через поверхность. Формулы Стокса, Остроградского-Гаусса в обозначениях векторной теории поля. Бескоординатное определение ротора и дивергенции. Потенциальные и соленоидальные поля.

Интерактивная форма: Бенефис задачи (работа в микрогруппах).

Раздел IX. Приложения интегрального исчисления функций нескольких переменных

Вычисление меры (длины, площади, объема) области с помощью криволинейных, двойных/поверхностных, тройных интегралов. Вычисление массы кривой, поверхности, тела с помощью криволинейных, двойных/поверхностных, тройных интегралов. Статические моменты и моменты инерции точки и системы точек; вычисление статических моментов и моментов инерции кривой, поверхности, тела с помощью криволинейных, двойных/поверхностных, тройных интегралов.

Вычисление работы силы при криволинейном перемещении тела.

Интерактивные формы: Мастер-класс «Составь задачу», математический турнир. Круглый стол «Математический анализ и естествознание».

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным докладам;
- решение задач (домашних заданий) по изучаемым темам;
- выполнение групповых интерактивных заданий.

ОС -1. Контрольная работа

1. Исследовать на сходимость ряды

, , ,

2. Исследовать на сходимость ряд

3. Вычислить сумму ряда с точностью

4. Найти область сходимости функционального ряда

5. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням *x*

6. Вычислить интеграл с точностью до 0.001

7.Разложить функцию *f(x)=2x+1* в ряд Фурье на промежутке (-3;3).

ОС-2. Примерный перечень тем рефератов.

1. Степенные ряды в трудах И.Ньютона.
2. Критика теории рядов в XVIII веке.
3. Функции, заданные с помощью рядов, и их исследование.
4. Методы суммирования рядов.
5. Интеграл Фурье и преобразование Фурье.
6. Двойные пределы и повторные пределы функций двух переменных.
7. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах.
8. Зависимые и независимые системы функций.
9. Экстремальные задачи геометрического содержания для функций нескольких переменных.
10. Экстремальные задачи физического содержания для функций нескольких переменных.
11. Экстремальные задачи практического содержания для функций нескольких переменных.
12. Задачи на условный экстремум экономического содержания.
13. Достаточные условия условного экстремума.
14. Теория Морса.
15. Основы теории катастроф: типичные особенности функций двух переменных.

ОС-3. Индивидуальное задание.

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции.

A B C D

Задача 2. Найти частные производные первого порядка от функций.

A B C D

Задача 3.

A) Найти B) Найти C) Найти

Задача 4.

A) Найти B) Найти C) Найти

Задача 5. A) Найти (в тех задачах, где это указано, не , а). B) Найти , .

A) B)

; ; ;;

Задача 6. A) Найдите , используя формулу (8). B) Найдите , , используя формулы (9).
C) Найдите ,,,,,используя непосредственное дифференцирование обеих частей уравнения.

A B C

Задача 7. Найти точки экстремума функций.

Задача 8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области , ограниченной указанными линиями. ;, ,

ОС-4. Контрольная работа.

1. Вычислить

2. Вычислить

3. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

4. Пластинка **D** задана ограничивающими ее плоскостями, m - поверхностная плотность. Найти массу пластинки

5. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

6.Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

7.Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

8.Найти объем тела, заданного неравенствами

ОС-5. Примерный перечень тем рефератов.

1. *n*-кратные интегралы и их свойства.
2. Криволинейные интегралы функций *n* переменных.
3. Дифференциальные формы, их дифференцирование и интегрирование.
4. Различные подходы к определению площади поверхности.
5. Ориентируемые и неориентируемые многообразия.
6. Геометрические приложения кратных интегралов.
7. Геометрические приложения криволинейных интегралов.
8. Физические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.
9. Скалярные и векторные поля в физике и в математике.
10. Теория размерности Хаусдорфа.
11. Интегралы и производные дробного порядка.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Волкова Н.А., Столярова И.В., Фолиадова Е.В. История математики: учебно-методические рекомендации. –Ульяновск. УлГПУ им. И.Н. Ульянова. 2017 – 39 с.
2. Коноплева И.В., Сибирева А.Р. Исследование функций: методические указания. – 2е изд. испр. –Ульяновск: УлГТУ, 2013. –32 с. – 2017 [Электронный].
3. Коноплева И.В., Сибирева А.Р. Пределы и непрерывность: Методические указания. - Ульяновск: УлГТУ, 2004. - 34 с. – 2017 [Электронный].
4. Математический анализ. Введение в анализ: учебно-методическое пособие для студентов направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование», профили «Математика. Информатика», «Математика. Иностранный язык», «Физика. Математика» и 44.03.01 «Педагогическое образование» профиль «Математика». Квалификация (степень) выпускника: бакалавр. Макеева О.В. – Ульяновск. УлГПУ им. И.Н. Ульянова, 2017. – 49 с.

5. Распутько Т. Б., Сибирева А.Р. Функции нескольких переменных: методические указания. –Ульяновск: УлГТУ, 2004. – 32 с. – 2017 [Электронный].
6. Распутько Т.Б., Сибирева А.Р. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. УлГТУ, Ульяновск, 2001. –36 с. – 2017 [Электронный].
7. Сибирева А.Р., Распутько Т.Б. Методы интегрирования. методические указания для самостоятельной работы студентов. Изд. 2-е. – Ульяновск: УлГТУ, 2005. – 40 с. – 2017 [Электронный].
8. Сибирева А.Р., Ригер Т.В. Кратные интегралы. Методические указания к типовому расчету по высшей математике. –Ульяновск: УлГТУ, 1997. – 32 с. – 2017 [Электронный].
9. Сибирева А.Р., Савинов Н.В. Качественные задачи и контрпримеры на тему «Пределы». Методические указания. – Ульяновск: УлГТУ, 2001. – 32 с.–2017 [Электронный].

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации 3 семестр ОС-1. Контрольная работа. ОС-2. Рефераты и сообщения 4 семестр ОС-3. Индивидуальное задание ОС-4. Контрольная работа. ОС-5. Рефераты и сообщения	ОР-1. Знает основные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач. ОР-2. Решает задачи по дисциплине, умеет проводить доказательства, классифицировать и систематизировать основные

	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** 3 семестр ОС-6 Экзамен в форме устного собеседования 4 семестр ОС-7. Экзамен в форме устного собеседования	изучаемые объекты, строить логически верные рассуждения. ОР-3. Знает возможности применения полученных сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях ОР-4. умеет решать задачи школьного курса математики повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-6. Экзамен.

Примерный перечень вопросов к экзамену

Раздел «Числовые ряды»

1. Понятие числового ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Остаток ряда.
2. Критерий Больцано-Коши сходимости числового ряда.
3. Ряды с положительными членами: критерий сходимости. Признаки сравнения для рядов с положительными членами.
4. Ряды с положительными членами: интегральный признак сходимости. Ряды вида .
5. Ряды с положительными членами: признак Коши (в форме неравенства и в предельной форме).
6. Ряды с положительными членами: признак Даламбера (в форме неравенства и в предельной форме).
7. Знакочередующиеся ряды: признак Лейбница.
8. Ряды с произвольными членами: Абсолютная и условная сходимость.
9. Признаки Коши и Даламбера для знакопеременных рядов.
10. Сложение рядов. Распределительное свойство рядов.
11. Умножение абсолютно сходящихся рядов.
12. Сочетательное свойство рядов.
13. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов.
14. Теорема Римана.

Раздел «Функциональные ряды. Степенные ряды»

15. Функциональные последовательности: поточечная и равномерная сходимость. Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

16. Функциональные ряды: поточечная и равномерная сходимость. Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
17. Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.
18. Сложение и умножение функциональных рядов.
19. Почленное интегрирование функциональной последовательности, функционального ряда.
20. Почленное дифференцирование функциональной последовательности, функционального ряда.
21. Степенной ряд с действительными коэффициентами. Теорема Абеля. Радиус сходимости и интервал сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость степенного ряда на любом отрезке внутри интервала сходимости.
22. Непрерывность суммы степенного ряда. Действия над степенными рядами.
23. Ряд Тейлора функции вещественной переменной. Единственность разложения функции в степенной ряд.
24. Достаточные условия сходимости ряда Тейлора к своей функции.
25. Разложение экспоненты, синуса и косинуса, гиперболического синуса и гиперболического косинуса в степенные ряды.
26. Биномиальный ряд.
27. Разложение логарифмической функции, арктангенса и арксинуса в степенные ряды.

Раздел «Тригонометрические ряды»

28. Пространства со скалярным произведением. Ортогональные системы функций. Тригонометрическая система как ортогональная система в пространстве функций, интегрируемых с квадратом. Разложение по ортогональной системе функций.
29. Ряд Фурье функции вещественной переменной на отрезке [-(; (]. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Достаточные условия сходимости ряда Фурье к своей функции (теорема Дирихле).
30. Ряды Фурье четных и нечетных функций. Разложение функции в ряд по синусам и в ряд по косинусам на отрезке [0; (].
31. Ряды Фурье на произвольном отрезке.
32. Ряды Фурье в комплексной форме.

Раздел «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

33. Евклидово n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$: метрика, окрестности, сходимость.
34. Фундаментальные последовательности в $\mathbb{R}^n$. Полнота пространства $\mathbb{R}^n$
35. Внутренние точки, точки прикосновения, предельные точки, изолированные точки, граничные точки множества в евклидовом n-мерном пространстве. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$. Ограниченные множества в $\mathbb{R}^n$. Связные множества в $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые области в $\mathbb{R}^n$.
36. Принцип Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$. Лемма Гейне-Бореля в $\mathbb{R}^n$.
37. Функции нескольких действительных переменных: предел и непрерывность.
38. Свойства функций, непрерывных в области (теорема Коши о промежуточном значении, теорема Вейерштрасса, теорема о равномерной непрерывности).
39. Дифференцируемые функции нескольких действительных переменных. Производные по направлению, частные производные и полный дифференциал. Дифференцируемость и непрерывность.
40. Дифференцируемость и существование частных производных.
41. Дифференцируемые отображения многомерных пространств. Матрица Якоби отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Полный дифференциал отображения из из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$.
42. Правила дифференцирования отображений. Матрица Якоби композиции отображений. Инвариантность формы первого дифференциала отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$.

43. Геометрический смысл частных производных. Геометрический смысл дифференциала функции нескольких переменных. Касательная плоскость и нормаль к явно заданной поверхности в трехмерном пространстве/
44. Производные по направлению как проекции градиента. Направления наискорейшего возрастания и наискорейшего убывания функции нескольких переменных.
45. Производные высших порядков. Теорема о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.
46. Дифференциалы высших порядков. Форма дифференциала *n*-го порядка.

Критерии оценивания знаний на экзамене

Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и задачу (каждый оценивается на 20 баллов), на 4 балла оценивается краткий ответ на дополнительный вопрос не входящий в билет (вопрос имеет однозначный ответ, выражаемый одним-двумя словами).

За ответ на каждый из теоретических вопросов

От 0 до 5 баллов ставится, если:

Ответ на вопрос практически отсутствует. Изложены отдельные знания из разных тем, приведены некоторые неточные определения или примеры, не относящиеся к вопросу билета.

От 6 до 10 баллов ставится, если:

Даны некоторые общие сведения по теоретическому вопросу, но в них отсутствует ясность, студент владеет некоторой терминологией, но затрудняется проиллюстрировать излагаемые сведения на примерах.

От 11 до 15 баллов ставится, если:

Практически полностью ответил по существу вопроса, но по теоретическому вопросу не привел доказательств, либо полностью раскрыл вопрос на примерах, но не сумел представить вопрос в обобщенной теоретической форме.

От 16 до 20 баллов ставится, если:

Дан полный, развернутый ответ на поставленный теоретический вопрос. Могут быть допущены 1-2 недочета или неточности, исправленные самостоятельно в процессе ответа. Приведены доказательства. Ответ имеет четкую структуру, изложение последовательно, речь грамотна.

За решение задачи

От 0 до 5 баллов ставится, если:

Решение задачи отсутствует, но возможно демонстрируется владение отдельными терминами, использованными в условии.

От 6 до 10 баллов ставится, если:

Задача не решена, но есть некоторые подходы к решению. В процессе решения допускаются ошибки, которые студент не может исправить с помощью преподавателя.

От 11 до 15 баллов ставится, если:

Практически полностью решил задачу (возможно после нескольких наводящих вопросов преподавателя, либо после исправления.

От 16 до 20 баллов ставится, если:

Задача полностью решена (возможны небольшие вычислительные ошибки, которые студент корректирует самостоятельно после указания на них преподавателем).

ОС-7. Экзамен.

Примерный перечень вопросов к экзамену

Раздел «Экстремумы функций нескольких переменных»

1. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.
2. Теорема о неявной функции.
3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной неявно.
4. Теорема о системе неявных функций. Поверхности, заданные параметрически. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной параметрически.

5. Теорема об обратном отображении.
6. Диффеоморфизмы областей и их свойства. Геометрический смысл модуля и знака якобиана диффеоморфного отображения.
7. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума.
8. Достаточные условия экстремума функции нескольких переменных в терминах второго дифференциала, в терминах гессиана.
9. Понятие условного экстремума функции нескольких переменных. Решение задачи на условный экстремум методом исключения переменных.
10. Лагранжиан. Решение задачи на условный экстремум методом множителей Лагранжа.
11. Наибольшие и наименьшие значения функции нескольких переменных в области. Случай задачи линейного программирования.

Раздел «Интегральное исчисление функций нескольких переменных: кратные интегралы»

12. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Двойной интеграл по прямоугольнику как предел интегральных сумм. Необходимое условие существования двойного интеграла.
13. Верхние и нижние суммы Дарбу функции двух переменных и их свойства. Двойной интеграл как разделяющее число верхних и нижних сумм Дарбу. Достаточные условия существования двойного интеграла по прямоугольнику.
14. Свойства двойного интеграла по прямоугольнику. Двойной интеграл по произвольному ограниченному множеству. Площадь ограниченного множества как двойной интеграл.
15. Сведение двойного интеграла к повторному (случай прямоугольной области, случай области, элементарной относительно одной из осей).
16. Коэффициент изменения меры при диффеоморфном отображении. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.
17. Задача о массе неоднородного тела. Тройной интеграл по параллелепипеду как предел интегральных сумм. Необходимое условие существования тройного интеграла. Тройной интеграл как разделяющее число верхних и нижних сумм Дарбу. Достаточные условия существования тройного интеграла.
18. Свойства тройного интеграла. Тройной интеграл по произвольному ограниченному телу. Объем ограниченного тела как тройной интеграл.
19. Сведение тройного интеграла к повторному (случаи параллелепипеда, области, элементарной относительно одной из осей, области, элементарной относительно одной из координатных плоскостей).
20. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

Раздел «Интегральное исчисление функций нескольких переменных: криволинейные и поверхностные интегралы»

21. Задачи о массе неоднородной кривой и о работе переменной силы. Понятие криволинейного интеграла первого рода (по длине дуги). Длина дуги кривой как криволинейный интеграл. Понятие криволинейного интеграла второго рода (по координатам).
22. Свойства криволинейных интегралов первого и второго рода.
23. Сведение криволинейного интеграла первого рода к интегралу Римана.
24. Сведение криволинейного интеграла второго рода к интегралу Римана. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.
25. Формула Грина. Вычисление площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла второго рода.

26. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора плоской кривой, соединяющей данные точки. Полные дифференциалы функций двух переменных и их интегрирование.
27. Понятие двусторонней поверхности. Сторона поверхности и ориентация кривых на поверхности.
28. Вычисление площади криволинейной поверхности, заданной параметрически. Случай явно заданной поверхности.
29. Понятие поверхностного интеграла первого рода (по площади поверхности). Понятие поверхностного интеграла второго рода (по координатам). Свойства поверхностных интегралов первого и второго рода.
30. Сведение поверхностных интегралов первого и второго рода к двойному интегралу. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода.
31. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Стокса.
32. Условия независимости поверхностного интеграла второго рода от выбора поверхности, натянутой на данный контур. Полные дифференциалы функций трех переменных и их интегрирование.
33. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора пространственной кривой, соединяющей данные точки.
34. Понятия скалярного и векторного поля (плоского, пространственного). Градиент скалярного поля, дивергенция и ротор векторного поля. Символический оператор «набла» и его свойства.
35. Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса в обозначениях векторной теории поля.

Раздел «Приложения интегрального исчисления функций нескольких переменных»

36. Вычисление длины дуги плоской или пространственной кривой, заданной параметрически, с помощью криволинейного интеграла первого рода. Случаи плоской кривой, заданной явно в декартовых или полярных координатах. Вычисление массы неоднородной кривой.
37. Вычисление площади плоской области с помощью двойного интеграла. Случаи криволинейной трапеции, области, элементарной относительно одной из осей, криволинейного сектора. Вычисление площади плоской области с помощью криволинейного интеграла второго рода. Вычисление массы неоднородной пластинки.
38. Вычисление площади криволинейной поверхности, заданной параметрически, с помощью поверхностного интеграла первого рода. Случай поверхности, заданной явно в декартовых координатах. Случай поверхности вращения. Вычисление площади цилиндрической поверхности с помощью криволинейного интеграла первого рода. Вычисление массы неоднородной поверхности.
39. Вычисление объема тела с помощью тройного интеграла. Случаи криволинейного цилиндра, области, элементарной относительно одной из осей, области, элементарной относительно одной из плоскостей, тела вращения. Вычисление объема тела с помощью поверхностного интеграла второго рода. Вычисление массы тела.
40. Вычисление статических моментов кривой, плоской области, криволинейной поверхности, тела. Координаты центра масс кривой, плоской области, криволинейной поверхности, тела.
41. Вычисление моментов инерции кривой, плоской области, криволинейной поверхности, тела относительно оси, относительно точки.
42. Вычисление работы переменной силы при перемещении тела вдоль кривой.

Критерии оценивания знаний на экзамене

Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и задачу (каждый оценивается на 20 баллов), на 4 балла оценивается краткий ответ на дополнительный вопрос не входящий в билет (вопрос имеет однозначный ответ, выражаемый одним-двумя словами).

За ответ на каждый из теоретических вопросов

От 0 до 5 баллов ставится, если:

Ответ на вопрос практически отсутствует. Изложены отдельные знания из разных тем, приведены некоторые неточные определения или примеры, не относящиеся к вопросу билета.

От 6 до 10 баллов ставится, если:

Даны некоторые общие сведения по теоретическому вопросу, но в них отсутствует ясность, студент владеет некоторой терминологией, но затрудняется проиллюстрировать излагаемые сведения на примерах.

От 11 до 15 баллов ставится, если:

Практически полностью ответил по существу вопроса, но по теоретическому вопросу не привел доказательств, либо полностью раскрыл вопрос на примерах, но не сумел представить вопрос в обобщенной теоретической форме.

От 16 до 20 баллов ставится, если:

Дан полный, развернутый ответ на поставленный теоретический вопрос. Могут быть допущены 1-2 недочета или неточности, исправленные самостоятельно в процессе ответа. Приведены доказательства. Ответ имеет четкую структуру, изложение последовательно, речь грамотна.

За решение задачи

От 0 до 5 баллов ставится, если:

Решение задачи отсутствует, но возможно демонстрируется владение отдельными терминами, использованными в условии.

От 6 до 10 баллов ставится, если:

Задача не решена, но есть некоторые подходы к решению. В процессе решения допускаются ошибки, которые студент не может исправить с помощью преподавателя.

От 11 до 15 баллов ставится, если:

Практически полностью решил задачу (возможно после нескольких наводящих вопросов преподавателя, либо после исправления.

От 16 до 20 баллов ставится, если:

Задача полностью решена (возможны небольшие вычислительные ошибки, которые студент корректирует самостоятельно после указания на них преподавателем).

Примерные практические задания к экзаменам

1. Исследовать на сходимость ряд

2. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x

3. Найти
4. Найти точки экстремума функций.
5. Вычислить

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
3,4 семестр	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	9 баллов max	24 балла max	236 баллов max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Оценка	Баллы (3 ЗЕ)
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

1. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

3 СЕМЕСТР

Занятие 1. План. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Геометрическая прогрессия. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши. Простейшие операции с рядами: умножение на число, сложение.

Занятие 2. План. Ряды с положительными членами. Теоремы сравнения.

Занятие 3. План. Признаки сходимости Д'Аламбера и Коши. Интегральный признак сходимости ряда. Оценка остатка ряда с помощью интегрального признака.

Занятие 4. План. Знакочередующиеся ряды. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о абсолютной сходимости ряда. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Обобщение признаков сходимости Д'Аламбера и Коши на случай знакопеременных рядов. Ряды с комплексными членами.

Занятие 5. План. Функциональные ряды, область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Теорема о предельном переходе для равномерно сходящейся последовательности. Теоремы о непрерывности суммы, о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.

Занятие 6. План. Степенные ряды. Теоремы Абеля. Круг сходимости, интервал и радиус сходимости для рядов с действительными членами. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Занятие 7. План. Разложение функций в степенной ряд. Ряд Тейлора. Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд. Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора. Разложение по степеням x некоторых элементарных функций.

Занятие 8. План. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям. Вычисление пределов, решение уравнений, нахождение интегралов с помощью степенных рядов.

Занятие 9. План. Тригонометрическая система функций. Тригонометрический ряд Фурье. Условия поточечной и равномерной сходимости ряда Фурье.

Занятие 10. План. Разложение в ряды Фурье четных и нечетных функций на (-(,(), функций заданных на (0, () и (-*l*,*l*).

Занятие 11. План. Комплексный ряд Фурье. Интеграл Фурье. Синус и косинус преобразования Фурье. Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье.

Занятие 12. План. Функции нескольких переменных. Область определения. График. Линии и поверхности уровня. Предел функции в точке. Непрерывность.

Занятие 13. План. Частные производные. Дифференцирование функции нескольких переменных. Полный дифференциал, связь с частными производными. Градиент, производная по направлению.

Занятие 14. План. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости результата дифференцирования от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, их инвариантность в случае замены переменных. Формула Тейлора. Касательная и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных. Приложения дифференциала.

Занятие 15. План. Производные сложных функций. Неявные функции. Теорема существования и дифференцирования неявных функций. Вычисление производных неявных функций.

4 СЕМЕСТР

Занятие 1. План. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума.

Занятие 2. План. Условный экстремум функций нескольких переменных необходимый признак условного экстремума. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Достаточный признак условного экстремума.

Занятие 3. План. Решение задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции непрерывной в замкнутой, ограниченной области.

Занятие 4. План. Решение текстовых задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции непрерывной в замкнутой, ограниченной области. Построение математических моделей задач.

Занятие 5. План. Двойные, тройные интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Задачи на нахождение двойных и тройных интегралов в декартовых координатах. Представление об интегралах любой кратности.

Занятие 6. План. Задачи на нахождение тройных интегралов в декартовых координатах. Замена переменных в кратном интеграле: общая и стандартная. Двойной интеграл в полярных координатах.

Занятие 7. План. Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Тройной интеграл в сферических координатах.

Занятие 8. План. Геометрические приложения кратных интегралов. Физические приложения кратных интегралов.

Занятие 9. План. Контрольная работа.

Занятие 10. План. Задачи, приводящие к понятиям криволинейных интегралов первого рода. Определения криволинейных интегралов. Основные свойства и вычисление криволинейных интегралов первого рода. Приложения криволинейных интегралов первого рода.

Занятие 11. План. Задачи, приводящие к понятиям криволинейных интегралов второго рода. Определения криволинейных интегралов. Основные свойства и вычисление криволинейных интегралов второго рода. Приложения криволинейных интегралов второго рода. Формула Грина.

Занятие 12. План. Площадь поверхности, ее вычисление. Определение поверхностных интегралов. Их основные свойства и вычисление. Приложения поверхностных интегралов первого рода.

Занятие 13. План. Векторные поля. Векторные линии и векторные трубки. Поток векторного поля. Теорема Остроградского. Дивергенция, инвариантное определение, физический смысл и вычисление. Соленоидальные поля. Основные свойства.

Занятие 14. План. Линейный интеграл поля. Циркуляция. Теорема Стокса. Ротор, инвариантное определение и физический смысл.

Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Потенциальные поля, условия потенциальности. Вычисление линейного интеграла в случае потенциального поля.

Занятие 15. План. Оператор Гамильтона, его применения. Операции второго порядка, оператор Лапласа. Выражение основных операций в криволинейных координатах.

2. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Бохан К. А. и др. Курс математического анализа: [в 2 т.] : учеб. пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Т. 1. М.: Интеграл, 2004. – 434с. (Библиотека УлГПУ)
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие - СПб. : Профессия, 2005. - 432 с. (Библиотека УлГПУ)
3. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. В 2 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды – М.: Физматлит, 2009. – 400с. https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=82814

4. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа : Т. 1 - 7-е изд. - М. : Физматлит, 2002. - 415 с. (Библиотека УлГПУ)

Дополнительная литература

1. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды: Учебник / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Физматлит, 2015. – 444 с. – ISBN 978-5-9221-1585-8. – URL: https://znanium.com/catalog/document?id=293958&showcollections=1

2. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ: Учебник / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Физматлит, 2003. – 424 с. – ISBN 5-9221-0185-4. URL: https://znanium.com/catalog/document?id=303181&showcollections=1

3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие/ Г.Н. Берман. – М.: Издательство "Лань", 2020. –492 с. – ISBN 978-5-8114-4862-3 URL https://e.lanbook.com/book/126705

Дополнительная литература

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебное пособие : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринский. – 8-е изд., испр. и доп. – Москва : Физматлит, 2001. – Том 1. – 680 с. – ISBN 978-5-9221-0156-0. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83037

2. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебное пособие / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринский. – 8-е изд. – Москва : Физматлит, 2001. – Том 2. – 861 с. – ISBN 978-5-9221-0157-8. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83038

3. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебное пособие : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринский. – Изд. 6-е. (1-е изд. - 1949 г.). – Москва : Физматлит, 2002. – Том 3. – 727 с. – ISBN 5-9221-0155-2. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83196

Интернет-ресурсы

1. Мир математических уравнений. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm
2. Softline. http://exponenta.ru/
3. Популярные лекции по математике. http://ilib.mccme.ru/plm
4. Школьникам, студентам, аспирантам. http://ph4s.ru/
5. Прикладная математика. http://primat.org
6. Учебно-методическая литература для студентов. http://studfiles.ru/
7. Сайт издательства «Венец» УЛГТУ. http://venec.ulstu.ru/lib/
8. МГТУ ГА. http://vm.mstuca.ru/posobia/posobia.htm
9. Единое окно доступа к образовательным ресурсам. http://window.edu.ru/