Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«21» июня 2022 г.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Программа учебной дисциплины
Модуля специальных разделов предметной области

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы
Информатика

(заочная форма обучения)

Составитель: Макеева О.В., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от «25» марта 2022 г. № 5

Ульяновск, 2022

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к Модулю специальных разделов предметной области Части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. Дисциплины (модули) учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Информатика», заочной формы обучения.

Процесс освоения дисциплины базируется на знаниях, умениях и навыках, приобретенных при изучении учебных предметов общеобразовательной школы: алгебра, в том числе основы теории вероятностей и математической статистики; геометрия; начала математического анализа; использует результаты освоения содержания учебных дисциплин «Методы математической обработки данных», «Основы математического анализа».

Результаты освоения дисциплины необходимы для прохождения практики Научно-исследовательская работа Модуля учебно-исследовательская и проектная деятельность Обязательной части Блока 2. Практики; для Выполнения и защиты выпускной квалификационной работы Блока 3. Государственная итоговая аттестация.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины является подготовка бакалавра к профессиональной деятельности педагога образовательной организации. Дисциплина предназначена дать будущим учителям профессиональную (теоретическую и практическую) подготовку в области математического моделирования в профессиональной деятельности.

Задачей освоения дисциплины является формирование целостного представления о стохастической природе окружающего мира, изучение специфических закономерностей случайных явлений, овладение вероятностно-статистическими методами обработки информации; формирование и развитие компетенций будущего учителя информатики в теории и практике моделирования стохастических явлений, возникающих в различных областях естествознания.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач. УК 1.2 – Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	ОР-1. Знает конструкции и схемы стохастического метода в математике.	ОР-2. Умеет использовать возможности стохастического метода в исследовательской деятельности.	
ПК-1 Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач. ПК-1.1 Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.	ОР-3. Знает конструкции вероятностных методов решения исследовательских задач. ОР-5. Знает конструкции статистических методов решения исследовательских задач.	ОР-4. Умеет использовать возможности стохастического моделирования в исследовательской деятельности. ОР-6. Умеет использовать возможности выборочного метода в исследовательской деятельности.	

ПК-3. Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов. ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).	ОР-7. Знает о прикладном характере вероятностных моделей и возможностях их использования для формирования просветительских запросов обучающихся. ОР-9. Знает о прикладном характере статистических моделей и возможностях их использования для формирования просветительских запросов обучающихся.	ОР-8. Умеет осмысливать прикладной характер вероятностных моделей как дидактического материала для формирования просветительских запросов обучающихся. ОР-10. Умеет осмысливать прикладной характер статистических моделей как дидактического материала для формирования просветительских запросов обучающихся.	

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Всего		Учебные занятия					Форма промежуточной аттестации
	Трудоемк.		Лекции, час	Практические занятия, час	В том числе практическая подготовка, час	Лабораторные занятия, час	Самостоятельная работа, час	
	Зач. ед.	Часы						
4	4	144	4	-	-	12	119	9 экзамен
Итого:	4	144	4	-	-	12	119	9 экзамен

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ п/п	Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
4 семестр					
1.	Случайные события	2	-	4	39
2.	Случайные величины	1	-	4	40
3.	Математическая статистика	1	-	4	40
	Итого	**4**	**-**	**12**	**119**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Раздел 1. Случайные события.

Тема 1. Основные понятия теории вероятностей.

Испытание и событие. Множество элементарных исходов эксперимента (возможности его визуализации). Классификация событий. Классическое, геометрическое, статистическое определение вероятности.

Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство. Свойства вероятностной меры.

Тема 2. Вероятности сложных событий.

Совместные и несовместные события. Независимые и зависимые события. Полная группа событий. Противоположные события. Понятие условной вероятности.

Теоремы сложения вероятностей (для совместных и несовместных событий), теоремы умножения вероятностей (для зависимых и независимых событий). Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

Тема 3. Повторные независимые испытания.

Схема независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли). Формула Бернулли. Наиболее вероятное число «успехов».

Предельные теоремы схемы Бернулли: теорема Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Раздел 2. Случайные величины.

Тема 4. Дискретные случайные величины.

Определение случайной величины. Закон распределения и функция распределения дискретной случайной величины. Числовые характеристики дискретных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее кваратическое отклонение, начальные и центральные моменты k–го порядка, мода.

Примеры законов распределения дискретных случайных величин: биномиальное распределение, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение, закон распределения Пуассона; их числовые характеристики.

Тема 5. Непрерывные случайные величины.

Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины. Вероятность попадания случайной точки в промежуток. Числовые характеристики непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты k–го порядка; мода, медиана, асимметрия, эксцесс.

Примеры законов распределений непрерывных случайных величин: равномерное распределение, показательное распределение, нормальное распределение; их числовые характеристики. Правило трех сигм нормального распределения.

Тема 6. Закон больших чисел.

Понятие о законе больших чисел в узком и широком смысле. Практическое значение закона больших чисел. Понятие о центральной предельной теореме. Теорема Ляпунова.

Неравенство Маркова. Лемма, неравенство и теорема Чебышева. Теорема Бернулли. Теорема Пуассона.

Раздел 3. Математическая статистика

Тема 7. Выборочный метод и статистическое оценивание.

Первичная обработка (ранжирование, группировка, построение вариационного ряда) и представление статистических данных (полигон, гистограмма, кумулятивная кривая); эмпирическая функция распределения. Концепция и задача выборочного метода. Виды выборок (собственно случайная, механическая, типическая, серийная выборка) и способы отбора данных (повторный и бесповторный отбор).

Понятие статистической оценки параметров, свойства оценок (несмещённость, эффективность и состоятельность оценки, точность и надёжность оценки). Точечные и интервальные оценки параметров распределения. Точеные оценка генеральной доли, генеральной средней, генеральной дисперсии для бесповторной и повторной выборки. Доверительные интервалы для оценки генеральной доли, генеральной средней и генеральной дисперсии для выборок разных объёмов. Нахождение минимального объема выборки.

Тема 8. Проверка статистических гипотез.

Принцип практической уверенности. Статистические гипотезы и общие идеи их проверки (простая и сложная гипотезы, основная и альтернативная гипотезы, статистический критерий, область отклонения и область принятия гипотезы, ошибки первого и второго рода, уровень значимости и мощность критерия, односторонние и двусторонние критерии, принцип проверки статистической гипотезы). Параметрические и непараметрические критерии.

Критерии согласия. Проверка гипотез о равенстве числовых характеристик генеральных совокупностей: сравнение средних двух совокупностей, исключение грубых

ошибок наблюдений; сравнение долей признака двух совокупностей; сравнение дисперсий двух совокупностей. Проверка гипотез о числовых значениях параметров: о значении математического ожидания; о значении дисперсии. Проверка гипотезы о законе распределения.

Тема 9. Элементы теории корреляционного и регрессионного анализа.

Функциональная, статистическая и корреляционная зависимость между величинами. Сила и направление связи. Выборочный коэффициент корреляции как инструмент изучения линейной статистической связи между величинами. Основная задача корреляционного анализа.

Выборочное уравнение прямой линии парной регрессии по не сгруппированным данным, его построение методом наименьших квадратов и использование для построения прогнозов. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции и построение доверительного интервала значимого коэффициента корреляции.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения проверочных и лабораторных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме подготовки к устным выступлениям (комментирование решения задач домашних заданий, итоговой контрольной

работы, творческого задания; доклады по темам индивидуальных и групповых проектов, рефератов).

ОС-7 Итоговая контрольная работа / Реферат

Примерное содержание итоговой контрольной работы

1. Сколько можно составить шестизначных телефонных номеров, у которых на первых двух местах стоит цифра 6, а на остальных – любая из цифр 0,1,…,9?
2. Из букв разрезной азбуки составили слово «математика». Найдите вероятность того, что извлеченные наугад 3 буквы образуют в порядке выбора слово «том».
3. Найдите вероятность того, что точка, брошенная наугад в эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$, попадет в круг $x^2+y^2\le 4$.
4. Имеется колода из 52 игральных карт. Из колоды наудачу вынимают 4 карты. Какова вероятность, что среди них будет хотя бы две дамы?
5. 70% деталей, поступающих на сборку, изготовлены станком, дающим 2% брака, а 30% - автоматом, дающим 5% брака; наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена первым автоматом?
6. Монету бросают пять раз. Найдите вероятность того, что герб выпадет не менее четырех раз.
7. Найдите вероятность того, что событие *A* наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.
8. Вероятность рождения мальчика 0,515. Чему равна вероятность того, что среди 60 новорожденных менее 50 мальчиков?
9. Найдите математическое ожидание, дисперсию случайной величины X – числа выпадений количества очков, кратного трём, в сумме на двух костях, если кости были брошены 4 раза.
10. Составьте закон распределения случайного числа отказавших элементов устройства, состоящего из трёх независимо работающих элементов, вероятность отказа каждого из которых в одном опыте равна 0,1. Найдите функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.
11. Абсолютно непрерывная случайная величина задана функцией распределения:
$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le -1;\\ -0{,}25(x^2-2x+c) & при \quad -1<x\le 1;\\ 1 & при \quad x>1.\end{cases}$$
Найдите значение параметра с, плотность вероятности и математическое ожидание случайной величины.
12. Случайная величина распределена равномерно на отрезке [1;4]. Найдите функцию распределения и постройте её график.
13. Распределение 50 рабочих механического цеха по тарифному разряду представлено в таблице/

Тарифный разряд	x_i	1	2	3	4	5	6
Частота (количество рабочих)	n_i	2	3	6	8	22	9

Найдите несмещённую и состоятельную оценку доли рабочих, имеющих не менее чем четвёртый квалификационный разряд.
14. На основании выборочных наблюдений производительности труда у 20 работниц установлено, что среднее квадратичное отклонение суточной выработки составляет 15 метров ткани в час. Предполагая, что производительность труда работницы имеет нормальное распределение, найдите границы, в которых с надёжностью 90%

заключены генеральная дисперсия и квадратичное отклонение суточной выработки работниц.

15. Фирма поставляет радары для измерения скорости движения автомобилей. Для закупки большой партии проведены испытания приборов, изготовленных на заводе А и заводе Б. Измерения проводили на одной и той же машине и одной и той же дороге. Определены величины отклонений между показаниями спидометра автомобиля и радара:

Завод А

Отклонение, км/ч	Δx_i	-0,7	-0,3	-0,1	0,5	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3
Число измерений	n_i	5	4	2	6	3	1	3	1	1

Завод Б

Отклонение, км/ч	Δy_i	-0,6	-0,1	0,4	0,7	1,0	1,4
Число измерений	m_i	4	5	3	2	2	1

Полагая показания спидометра эталоном и считая отклонения в показаниях радаров нормально распределенными случайными величинами X и Y, проверьте гипотезу об одинаковой точности измерений, проводимых радарами завода А и завода Б, на уровне значимости 0,1.

16. Фирма – изготовитель женских украшений, выпустив новый товар, утверждает, что 40% покупателей купят эти украшения. В ходе 10-дневной рекламной распродажи были получены данные о количестве покупателей нового вида товара.

x_i	13%	27%	30%	39%	42%
n_i	4	2	2	1	1

На 5%-м уровне значимости оцените утверждение представителя фирмы – изготовителя украшений.

Примерный перечень тем рефератов

1. Вероятностные модели в страховании.
2. Задачи и методы дисперсионного анализа.
3. Информация и энтропия.
4. Линейные регрессионные модели финансового рынка.
5. Мартингалы и их применение.
6. Нелинейная регрессия.
7. Производящие и характеристические функции и их применение.
8. Процессы гибели и размножения.
9. Теоремы о случайных блужданиях на решетке.
10. Цепи Маркова и их применения.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: материалы самостоятельных работ, итоговой контрольной работы / реферата. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на лабораторных занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
1.	**Оценочные средства для текущей аттестации** ОС-1 Контрольная работа ОС-2 Индивидуальное / групповое задание ОС-3 Лабораторная работа по теме «Выборочный метод» ОС-4 Лабораторная работа по теме «Статистические оценки параметров распределения ОС-5 Лабораторная работа по теме «Статистическая оценка статистических гипотез» ОС-6 Лабораторная работа по теме «Элементы теории корреляции» ОС-7 Итоговая контрольная работа / Реферат	ОР-1. Знает конструкции и схемы стохастического метода в математике. ОР-2. Умеет использовать возможности стохастического метода в исследовательской деятельности. ОР-3. Знает конструкции вероятностных методов решения исследовательских задач. ОР-4. Умеет использовать возможности стохастического моделирования в исследовательской деятельности. ОР-5. Знает конструкции статистических методов решения исследовательских задач. ОР-6. Умеет использовать возможности выборочного метода в исследовательской деятельности. ОР-7. Знает о прикладном характере вероятностных моделей и возможностях их использования для формирования просветительских запросов обучающихся. ОР-8. Умеет осмысливать прикладной характер вероятностных моделей как дидактического материала для формирования просветительских запросов обучающихся. ОР-9. Знает о прикладном характере статистических моделей и возможностях их использования для формирования просветительских запросов обучающихся. ОР-10. Умеет осмысливать прикладной характер статистических моделей как дидактического материала для формирования просветительских запросов обучающихся.
2.	**Оценочные средства для промежуточной аттестации** ОС-8 Экзамен в форме устного собеседования	

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-1 Контрольная работа

1. В ящике содержится 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.
2. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность безотказной работы в течение часа первого элемента равна 0,95, второго – 0,98, третьего – 0,9. Найдите вероятность того, что в течение часа будет работать хотя бы один элемент.
3. В первой урне 5 белых и 10 черных шаров, во второй – 3 белых и 7 черных шаров. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Определите вероятность того, что вынутый шар – белый.
4. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке, если броски считать независимыми? Каково наиболее вероятное число попаданий кольца на колышек при восьми бросаниях?
5. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найдите вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830.
6. См. задачу 5. Какова вероятность того, что частота проросших семян отклонится по абсолютной величине от вероятности прорастания не больше, чем на 0,01?
7. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах. *(задача из открытого банка заданий ЕГЭ*)

ОС-2 Индивидуальное / групповое задание

1. По одному и тому же маршруту совершают полет три самолета. Для каждого самолета вероятность прибыть в аэропорт по расписанию равна 0,8. Составьте ряд распределения числа самолетов, прибывших в аэропорт по расписанию. Найдите $M(X)$, $D(X)$, σ. Постройте многоугольник распределения.
2. Бросается игральная кость до первого выпадения пяти очков. Составить ряд распределения числа бросков. Сколько раз в среднем придется бросать игральную кость?
3. Задана интегральная функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Требуется: 1) найти дифференциальную функцию $f(x)$, 2) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, 3) построить графики интегральной и дифференциальной функций:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ x/2 & при \quad 0<x\le 2\\ 1 & при \quad x>2\end{cases}.$$

4. Дана дифференциальная функция $f(x)$ случайной величины X. Требуется: 1) найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$, 2) найти интегральную функцию $F(x)$, 3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\notin(0;\pi]\\ \frac{1}{2}\sin x & при \quad x\in(0;\pi]\end{cases}.$$

5. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найдите вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее 2 минут.

6. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением 100 м. Найти: 1) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м; 2) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

7. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Пользуясь неравенством Чебышева, оцените вероятность неравенства $\left|X - M(X)\right| < \sqrt{0{,}4}$.

8. На поле площадью в 1000 га берется на выборку по 1 м^2 с каждого га и подсчитывается урожайность. Оцените вероятность того, что средняя выборочная урожайность будет отличаться от средней урожайности по всей площади не более чем на 0,2 ц, если дисперсия на каждый га не превышает 2.

9. Вероятность наличия зазубрин на металлических брусках, заготовленных для обтачки, равна 0,2. Оцените вероятность того, что в партии из 1000 брусков отклонение числа пригодных брусков от 800 не превышает 5%.

ОС-3 Лабораторная работа «Выборочный метод»

Задание 1

В таблице приведены размеры одежды 50 учащихся 9 класса:

50	40	44	44	46	46	44	48	46	44
38	44	48	50	40	42	50	46	54	44
42	42	52	44	46	48	38	46	42	44
46	48	44	40	52	44	48	50	46	46
48	40	46	42	44	50	46	44	46	48

На основании этих данных составить таблицу распределения по частотам значений случайной величины X - размеров одежды учащихся 9 класса.

1) Построить полигон частот.
2) Найти среднее значение величины X, медиану, моду, выборочную дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Задание 2

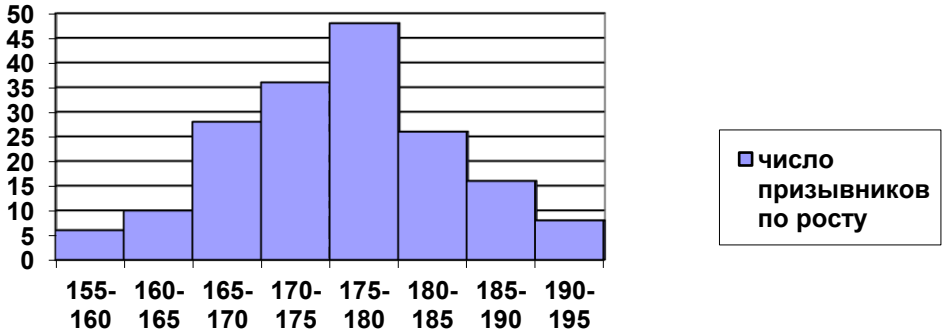
При изучении учебной нагрузки учащихся попросили 32 восьмиклассников отметить время (с точностью до 0,1 ч), которое они затратили в определенный день на выполнение домашних заданий. Получили следующие данные:

2,7	2,5	3,1	3,2	3,4	1,6	1,8	4,2
2,6	3,4	3,2	2,9	1.9	1.5	3,7	3,6
3,1	2.9	2,8	1.5	3.1	3,4	2.2	2,8
4,1	2.4	4,3	1.9	3,6	1,8	2,8	3,9

Представьте полученные данные в виде интервального ряда с интервалами длиной 0.5 ч. Найдите среднее время, потраченное на выполнение домашних заданий. Постройте полигон частот.

Задание 3

Гистограмма характеризует распределение призывников по росту:



Пользуясь гистограммой, найдите:

А) число призывников ростом от 180 до 185 см;

Б) группу роста, к которой относится наибольшее число призывников;

В) общее число призывников;

Для случайной величины X, означающей рост призывника, найдите: среднее значение, и медиану. Найдите приближенное значение моды.

Задание 4

Даны наблюдавшиеся значения некоторой случайной величины. Требуется:

1. Построить сгруппированный статистический ряд.
2. Построить кумуляту.
3. Построить гистограмму и полигон относительных частот.
4. Найти выборочные точечные характеристики: среднюю, дисперсию, моду, медиану.

185	151	187	211	155	208	178	193	149	175
193	163	166	131	200	173	145	166	216	216
156	174	174	161	225	178	188	157	177	183
206	187	209	157	180	163	189	196	204	199
242	192	160	123	181	172	183	120	164	197
134	204	148	157	133	151	169	219	189	134

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое выборка? Какая выборка является репрезентативной?
2. Дайте определение понятия статистического ряда распределения?
3. Как строится сгруппированный статистический ряд?
4. Что такое полигон и гистограмма?
5. Что такое мода и медиана? Как графически их можно найти?
6. Запишите формулы для вычисления выборочной средней и выборочной дисперсии: а) если имеется дискретный статистический ряд, б) если имеется сгруппированный статистический ряд.

ОС-4 Лабораторная работа «Статистические оценки параметров распределения»

Приводятся результаты измерения некоторой величины, которые будем рассматривать как n реализаций случайной величины X:

31,85 31,36 30,32 30,90 31,70 32,40
31,60 31,12 30,98 31,02 31,05 31,00

В предположении, что X имеет нормальное распределение:

1. Найти точечные несмещенные оценки математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ.

2. Найти доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание с заданной доверительной вероятностью: $\gamma = 0{,}95$; $\gamma = 0{,}99$; $\gamma = 0{,}999$.

3. Найти погрешность, с которой среднее арифметическое оценивает математическое ожидание *a* случайной величины X, если доверительная вероятность $\gamma = 0{,}99$; $\gamma = 0{,}999$.

4. Найти минимальный объем выборки, чтобы с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$ можно было утверждать, что, принимая среднее арифметическое за математическое ожидание случайной величины X, допускаем погрешность $\varepsilon = \frac{1}{3}\sigma$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение понятия оценки параметра.
2. Какие требования предъявляются к оценкам?
3. Какие оценки называются точечными?
4. Запишите формулы для нахождения точечных оценок.
5. Приведите примеры несмещенной и смещенной оценок.
6. Для чего вводят интервальные оценки?
7. Дайте определение доверительного интервала, надежности, точности оценки.
8. Какое распределение называется нормальным?
9. Запишите формулы для нахождения доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения при известном и неизвестном σ.
10. Каков алгоритм нахождения доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения при известном и неизвестном σ?

ОС-5 Лабораторная работа «Статистическая оценка статистических гипотез»

Задание 1

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с эмпирическим распределением выборки.

Границы интервалов	-10;-6	-6;-2	-2;-2	2;6	6;10	10;14
частота	6	13	19	12	6	4

Задание 2

В двух группах учащихся — экспериментальной и контрольной — получены следующие результаты по учебному предмету (тестовые баллы; см. табл.).

Результаты эксперимента

Первая группа (экспериментальная) N=11 человек	Вторая группа (контрольная) M=9 человек
12 14 13 16 11 9 13 15 15 18 14	13 9 11 10 7 6 8 10 11

Выдвинем гипотезы:

H_0: средние тестовые баллы по учебному предмету в экспериментальной и контрольной группах совпадают.

H_1: средние тестовые баллы по учебному предмету в экспериментальной и контрольной группах не совпадают.

Проверьте нулевую гипотезу с помощью критерия Крамера-Уэлча, подсчитав следующие характеристики:

$$T_{эмп} = \frac{\sqrt{M \cdot N} \cdot \left|\bar{x} - \bar{y}\right|}{\sqrt{N \cdot D_x + M \cdot D_y}}, \quad \text{где} \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\sum y_i, \quad D_x = \frac{1}{N-1}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2,$$

$$D_y = \frac{1}{M-1}\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2.$$

(Если $T_{эмп} > 1{,}96$, то нулевая гипотеза отвергается).

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое статистическая гипотеза?
2. Какая гипотеза называется нулевой, какая – конкурирующей?
3. Какие виды ошибок могут возникнуть при проверке нулевой гипотезы?
4. Что означает уровень значимости α?
5. Что такое статистический критерий?
6. Что такое критическая область? Каковы виды критических областей?
7. Что такое критерий согласия?
8. В чем заключается критерий согласия Пирсона?
9. Сформулируйте правило проверки нулевой гипотезы.
10. Каков алгоритм отыскания теоретических частот в предположении нормального распределения генеральной совокупности в зависимости от различных исходных данных (вариационный ряд, интервальный ряд)?

ОС-6 Лабораторная работа «Элементы теории корреляции»

По заданной выборке:

1) найти уравнение прямой линии регрессии *Y* на *X*,

2) оценить тесноту линейной связи, вычислив выборочный коэффициент корреляции;

3) проверить гипотезу о значимости коэффициента корреляции при уровне значимости 0,1.

X	9,7	10,4	10,3	9,8	10,1	10,2	10,0	9,9	9,6	9,8
Y	3,5	3,1	3,2	3,4	3,0	3,3	3,1	3,4	3,5	3,2

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение понятия статистической и корреляционной зависимости.
2. Что понимают под условной средней?
3. Сформулируйте задачи корреляционного анализа.
4. В чем состоит суть метода наименьших квадратов?
5. Что характеризует коэффициент корреляции? Каковы его свойства?
6. Что можно сказать о связи между двумя случайными величинами, если коэффициент корреляции равен нулю?
7. Запишите уравнение прямой регрессии.
8. Запишите формулу выборочного коэффициента корреляции.
9. Как проверяется значимость выборочного коэффициента корреляции?

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-8 Экзамен в форме устного собеседования

Программа экзамена

Раздел 1. Случайные события

1. Классификация событий. Полная группа событий. Противоположные события.
2. Классическое, геометрическое и статическое определение вероятности.
3. Пространство элементарных событий. Аксиомы теории вероятностей. Свойства вероятности.
4. Совместные и несовместные события. Сумма событий. Теоремы сложения вероятностей.
5. Зависимые и независимые события. Произведение событий. Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий.
6. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
7. Схема независимых повторных испытаний. Формула Бернулли. Предельная формула Пуассона.
8. Наиболее вероятное число успехов. Среднее число успехов.
9. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа. Свойства и график функции Гаусса.
10. Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа. Свойства функции Лапласа.

Раздел 2. Случайные величины

11. Определение случайной величины. Закон распределения вероятностей.
12. Примеры дискретных распределений случайной величины (биномиальное, распределение Пуассона, геометрическое, гипергеометрическое).
13. Функция распределения и её свойства. Функция распределения дискретной случайной величины.
14. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности и её свойства.
15. Связь интегральной и дифференциальной функций распределения случайной величины.
16. Примеры непрерывных распределений (равномерное, показательное, нормальное).
17. Математическое ожидание случайной величины и его свойства. Вычисление математического ожидания дискретных и непрерывных случайных величин.
18. Дисперсия случайной величины и её свойства. Среднее квадратичное отклонение. Вычисление дисперсии дискретных и непрерывных случайных величин.
19. Мода и медиана, начальные и центральные моменты, асимметрия, эксцесс случайных величин.
20. Закон больших чисел. Неравенство Маркова. Лемма, неравенство и теорема Чебышёва. Теоремы Бернулли и Пуассона.
21. Сходимость по вероятности. Центральная предельная теорема Ляпунова и её следствие.

Раздел 3. Математическая статистика

22. Вариационные ряды и их виды. Графическое представление вариационного ряда (полигон и гистограмма). Эмпирическая функция распределения и её график.
23. Выборочные числовые характеристики статистического распределения: средние величины и показатели вариации.
24. Генеральная и выборочная совокупность. Основная идея выборочного метода.

25. Понятие статистической оценки. Требования к оценкам. Несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.
26. Интервальные оценки. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения а) при известной дисперсии; б) при неизвестной дисперсии. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения.
27. Принцип практической уверенности. Статистическая гипотеза. Основная и конкурирующая гипотезы. Типы гипотез.
28. Статистический критерий. Уровень значимости и мощность критерия. Ошибки первого и второго рода.
29. Критическая область и область принятия гипотезы. Общая схема проверки статистической гипотезы.
30. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Основные задачи корреляционного и регрессионного анализа.
31. Выборочный коэффициент корреляции, его вычисление, свойства; проверка надёжности.
32. Выборочное уравнение прямой линии регрессии, его вывод и возможности применения.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования баллов, набранных в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен	Итоговая сумма баллов
$1\times 9=9$	$1\times 15=15$	212	64	300

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Результат	Баллы (4 ЗЕ)
«отлично»	361-400 баллов
«хорошо»	281-360 баллов
«удовлетворительно»	201-280 баллов
«неудовлетворительно»	0-200 баллов

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения

материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к лабораторным занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы лабораторных занятий

Занятие 1. Определение вероятности случайного события

Материал для освоения

1. Вероятность случайного события как мера возможности его наступления. Различные подходы к определению вероятности случайного события.
2. Схема конечного числа равновозможных исходов.
3. Схема бесконечного числа равновозможных исходов.
4. Статистический подход к определению вероятности.

Занятие 2. Вероятности сложных событий

Материал для освоения

1. Операции над событиями.
2. Условная вероятность события.
3. Теоремы сложения вероятностей.
4. Теоремы умножения вероятностей.
5. Формула полной вероятности.
6. Формула Байеса.

Самостоятельно.. Повторные независимые испытания с двумя исходами

Материал для освоения

1. Схема Бернулли.
2. Формула Бернулли.
3. Формула Пуассона.
4. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
5. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Занятие 3. Дискретные случайные величины.

Материал для освоения

1. Дискретная случайная величина и закон ее распределения.
2. Многоугольник распределения дискретной случайной величины.
3. Функция распределения дискретной случайной величины и ее график.
4. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Занятие 4. Непрерывные случайные величины.

Материал для освоения

1. Непрерывная случайная величина.
2. Функция распределения непрерывной случайной величины.
3. Плотность вероятности непрерывной случайной величины.
4. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Самостоятельно. Закон больших чисел.

Материал для освоения

1. Неравенство Маркова.
2. Неравенство Чебышева.
3. Теорема Чебышева.
4. Теорема Бернулли.
5. Теорема Ляпунова.

Самостоятельно. Выборочный метод и статистическое оценивание.

Материал для освоения

1. Вариационные ряды и их представление.
2. Полигон и гистограмма.
3. Меры усреднения выборочных данных.
4. Меры вариации выборочных данных.
5. Точные оценки параметров генеральной совокупности по выборочным данным.
6. Интервальное оценивание параметров генеральной совокупности по выборочным данным.
7. Определение минимального объема выборки, удовлетворяющей заданным свойствам.

Занятие 5. Проверка статистических гипотез.

Материал для освоения

1. Основная и конкурирующая гипотезы.
2. Ошибки первого и второго рода.
3. Статистический критерий проверки гипотезы.
4. Критическая область и область принятия гипотезы.
5. Уровень значимости гипотезы.
6. Проверка гипотезы о равенстве характеристик двух совокупностей.
7. Проверка гипотезы о числовых значениях параметров двух совокупностей.
8. Проверка гипотезы о характере распределения.

Занятие 6. Аппроксимация величин на основе выборочных данных.

Материал для освоения

1. Задачи корреляционного и регрессионного анализа.
2. Нахождение выборочного коэффициента корреляции и проверка его значимости.
3. Условные средние и выборочное уравнение регрессии.
4. Методом наименьших квадратов.
5. Построение прямой линии парной регрессии методом наименьших квадратов.
6. Понятие о нелинейной регрессии.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Березинец, И. В. Практикум по теории вероятностей и математической статистике / И. В. Березинец ; Высшая школа менеджмента СПбГУ. — 9-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Высшая школа менеджмента, 2013 — 163 с. - ISBN 978-5-9924-0088-5. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/492718 – Режим доступа: по подписке.
2. Коган, Е. А.. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Е. А. Коган, А. А. Юрченко. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 250 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-014235-7. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1052969 – Режим доступа: по подписке.
3. Сапожников, П. Н. Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах : учебное пособие / П. Н. Сапожников, А. А. Макаров, М. В. Радионова. — Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2020. — 496 с. - ISBN 978-5-906818-47-8. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1027404 – Режим доступа: по подписке.

Дополнительная литература

1. Бакланова, И. И. Теория вероятности : учебно-методическое пособие : [16+] / И. И. Бакланова, Е. В. Матвеева, Л. А. Медведков ; Поволжский государственный технологический университет. – Йошкар-Ола : Поволжский государственный технологический университет, 2017. – 64 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=483692 – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-8158-1801-9. – Текст : электронный.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей [Электронное издание] / Е.С. Вентцель (И. Грекова). – М.: Наука, 1969. - 564 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=458388&sr=1
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: задачи и упражнения [электронный ресурс] / Е.С. Вентцель (И. Грекова), Л.А. Овчаров. – М.: Наука, 1969. - 363 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=458387
4. Гутова, С. Г. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие : [16+] / С. Г. Гутова, О. А. Алтемерова ; Кемеровский государственный университет. – Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2016. – 216 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481538 – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-8353-1914-5. – Текст : электронный.

Программные продукты

1. Microsoft Office Word
2. Microsoft Office Excel
3. Microsoft Office Power Point