Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
25 июня 2021 г.

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Программа учебной дисциплины модуля
«Специальные разделы предметной области»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Иностранный язык

(очная форма обучения)

Составители: Гришина С.А., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики;
Череватенко О.И., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Основания геометрии» относится к дисциплинам обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) Предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Иностранный язык», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках курса «Аналитическая геометрия», «Конструктивная геометрия», школьного курса математики.

Результаты изучения дисциплины являются теоретической и методологической основой для изучения дисциплин: «Элементарная математика», а также спецкурсов по математике «Фрактальная геометрия», «Алгебраические методы решения геометрических задач», «Избранные вопросы алгебры и геометрии», «Дифференциальная геометрия», «Неевклидова геометрия», для прохождения практик «Учебная (технологическая) Практикум по построению изображений», «Учебная (научно-исследовательская работа, получение первичных навыков научно-исследовательской работы) Курсовая работа №1» и итоговой аттестации.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целями освоения дисциплины «Основания геометрии» являются

- раскрытие значение геометрии, углубление представления о месте геометрии в изучении окружающего мира;
- изучение основных разделов геометрии и воспитание общей геометрической культуры, необходимой будущему учителю для понимания как основного курса математики, так и школьных факультативных курсов;
- способствовать развитию пространственного мышления.

Задачей освоения дисциплины является развитие умения самостоятельной работы с математической литературой, курс «Основания геометрии» должен дать студентам знания, навыки и умения, необходимые для успешного изучения других разделов математики

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Основания геометрии» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-11. Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в соответствии с профилем и уровнем			

обучения) и в области образования ПК-11.1. Знает основные научные понятия и особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основы организации исследовательской деятельности; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач. ПК-11.2. Умеет самостоятельно и в составе научного коллектива решать конкретные задачи профессиональной деятельности; самостоятельно и под научным руководством осуществлять сбор и обработку информации; способен применять полученные знания для объяснения актуальных проблем и тенденций развития предмета; проводить	ОР-1 Знает основные фундаментальные понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области.	ОР-3 Умеет в составе группы решать конкретные задачи профессиональной деятельности; оценивать качество проектов научных исследований в предметной области. ОР-4 Умеет самостоятельно осуществлять сбор и обработку информации, используя	

исследовательскую работу в соответствии с индивидуальным планом.		современные информационные средства поиска и анализа данных;	
ПК-13. Способен соотносить основные этапы развития предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) с ее актуальными задачами, методами и концептуальными подходами, тенденциями и перспективами ее современного развития. ПК-13.1. Знает основные этапы исторического развития предметной области. ПК-13.2. Умеет соотносить полученные знания со спецификой актуальными задачами, методами и концептуальными подходами, тенденциями и перспективами развития.	ОР-5 Знает основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов	ОР-6 Умеет находить необходимую, соответствующую теме, информацию, используя основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; ОР-7 Умеет выделять этапы развития основных понятий, идей, концепций	

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия					Форма промежуточной аттестации
	Всего	Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.					

	Зач. ед.	Часы					
4	3	108	18	30	-	33	экзамен
Итого:	3	108	18	30	-	33	экзамен

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
4 семестр				
Основные факты проективной геометрии	4	-	-	-
Основания геометрии. Общие вопросы аксиоматики	4	-	-	11
Исторический обзор обоснования геометрии	4	-	-	11
Обоснование евклидовой геометрии по Вейлю	4	-	-	6
Измерение скалярных величин	2	-	-	5
Задачи по планиметрии	-	30	-	-
Итого по 4 семестру	**18**	**30**	**-**	**33**
Всего по дисциплине:	**18**	**30**	**-**	**33**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса

I. ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ.
Линии второго порядка на проективной плоскости. Канонические уравнения линий второго порядка в проективных координатах Проективная классификация линий второго порядка. Полюс и поляра Понятие о полярном соответствии.
Геометрия на проективной плоскости с фиксированной прямой. Евклидова геометрия с проективной точки зрения.

II. ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АКСИОМАТИКИ

Понятие об аксиоматическом методе. Понятие об интерпретации (модели) системы аксиом. Непротиворечивость, независимость и полнота системы аксиом проективной геометрии.

III. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР ОБОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Критика системы Евклида. Пятый постулат. Предложения, эквивалентные пятому постулату.

Предшественники и творцы неевклидовой геометрии (Саккери, Ламберт, Лежандр, Гаусс, Больяи, Н И. Лобачевский).

Аксиома Лобачевского. Основные факты геометрии Лобачевского. Система аксиом Гильберта (обзор).

IV. ОБОСНОВАНИЕ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ПО ВЕЙЛЮ

Непротиворечивость и полнота системы аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства. Определение прямых, плоскостей, лучей, отрезков, углов. Примеры доказательств некоторых теорем.

Аксиоматика школьного курса геометрии.

V. ИЗМЕРЕНИЕ СКАЛЯРНЫХ ВЕЛИЧИН

Длина отрезка, аксиомы. Теорема существования и единственности. Площадь многоугольника, аксиомы. Теорема существования и единственности. Равновеликость и равносоставленность. Теория объемов (обзор).

VI. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Линии и замечательные точки в треугольнике. Окружности. Метод вспомогательного элемента в решении задач.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным выступлениям по материалам лекций, самостоятельных докладов, презентаций;
- подготовки тестов по вопросам программы
- домашних заданий для самостоятельного решения

ОС-1. Самостоятельная работа

1. Вычислить сложное отношение четырех коллинеарных точек прямой.
2. Вычислить сложное отношение четырех прямых пучка.
3. Построить четвертую гармоническую точку.
4. Определить элементы на конфигурации Дезарга.

ОС-2. Контрольная работа

1. Определить фигуры, двойственные трехвершиннику по большому и малому принципам двойственности.
2. Доказать теорему, двойственную по большому принципу двойственности теореме: через всякую прямую проходят по крайней мере две плоскости.
3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Построены отрезки MN и AN. Выполнить двойственное построение.
4. Сформулировать теорему, двойственную обратной теореме Дезарга в пространстве, и доказать ее.

ОС-2. Контрольная работа

1. Основание треугольника равно 20 см, медианы боковых сторон равны 18 см и 24 см. Найдите площадь треугольника.
2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CH и AK. Известно, что AC = 2, площадь круга, описанного около треугольника HBK, равна . Найдите угол между высотой и стороной BC.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла ACB; DM и DP являются соответственно высотами треугольников ADC и BDC. AM = 4, BP = 9. Найдите AC и периметр треугольника ACD.
3. Две стороны треугольника равны a и b (a > b). Найдите третью сторону, если известно, что она равна соответствующей ей биссектрисе.

Вопросы для самостоятельного изучениясобучающимися (темы мини-выступлений и рефератов)

1. Решение задач стереометрии в пространстве Лобачевского.
2. Планиметрия на плоскости Лобачевского.
3. Геометрия на сфере.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Гришина С.А., Кувшинова А.Н., Куренева Т.Н., Череватенко О.И. Геометрия: учебно-методическое пособие. Часть 3. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. – 112 с..
2. Куренева Т.Н. Методические указания и контрольная работа № 3 по теме «Методы изображений. Проективная геометрия». Для студентов – заочников 3 курса физико-математического факультета .- Ульяновск, 2004. (Библиотека УлГПУ).

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации	ОР-1

	ОС-1 Самостоятельная работа ОС-2 Контрольная работа	Знает основные фундаментальные понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области. ОР-3 Умеет в составе группы решать конкретные задачи профессиональной деятельности; оценивать качество проектов научных исследований в предметной области. ОР-4 Умеет самостоятельно осуществлять сбор и обработку информации, используя современные информационные средства поиска и анализа данных; ОР-5 Знает основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов ОР-6 Умеет находить необходимую, соответствующую теме, информацию, используя основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; ОР-7 Умеет выделять этапы развития основных понятий, идей, концепций
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-3 экзамен в форме устного собеседования	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине «Основания геометрии».

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-3 Экзамен в форме устного собеседования
Перечень вопросов к экзамену

1. Перспективное соответствие между плоскостью и связкой. Особые лучи и особая плоскость связки.
2. Расширенная плоскость. Несобственные элементы.
3. Свойства проективной прямой и проективной плоскости.
4. Аксиомы проективного пространства.
5. Проективные координаты.
6. Прямая на проективной плоскости. Координаты прямой.
7. Принципы двойственности (малый и большой) формы первой ступени.
8. Теорема Дезарга.
9. Перспективные и проективные отображения в формах первой ступени. Определениепроективности по Понселе.
10. Сложное отношение 4-х элементов в формах первой ступени (рядах и пучках).
11. Инвариантность сложного отношения при проектированиях и сечениях. Определение проективности по Штейнеру.
12. Гармонические четверки элементов в формах первой ступени. Четырехвершинник и его гармонические свойства.
13. Свойства проективных отображений в формах первой ступени.
14. Построение проективного соответствия в рядах.
15. Построение проективного соответствия в пучках.
16. Теорема Штейнера.
17. Теорема Паскаля. Построение точек линии второго порядка на основе теоремы Паскаля.
18. Линии второго порядка на проективной плоскости. Пересечение линии 2-го порядка с прямой.
19. Касательная к линии второго порядка.
20. Проективная классификация линий второго порядка.
21. Полюсы и поляры теоремы о свойствах полюсов и поляр.
22. Преобразование координат. Проективные преобразования. Предмет проективной геометрии.
23. Полярное преобразование. Автополярные фигуры.
24. Понятие об аксиоматическом методе. Понятие об интерпретации (модели) системы аксиом.
25. Требования, предъявляемые к системе аксиом: непротиворечивость, независимость, полнота.
26. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Критика «Начал».
27. Проблема пятого постулата.
28. Н.И. Лобачевский и его геометрия. Аксиома Лобачевского.

29. Система аксиом Гильберта.
30. Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского.
31. Непротиворечивость геометрии Лобачевского. Независимость пятого постулата от остальных аксиом Гильберта.
32. Аксиоматика Вейля евклидовой геометрии.
33. Непротиворечивость системы аксиом Вейля.
34. Полнота системы аксиом Вейля трехмерного пространства.
35. Определение прямых, лучей, отрезков, плоскостей, углов. Доказательство некоторых теорем планиметрии и стереометрии.
36. Определение длины отрезка. Теорема существования и единственности.
37. Понятие площади многоугольника. Теорема существования и единственности.
38. Равновеликость и равносоставленность многоугольников. Теорема Бояи-Гервина.
39. Теория объемов (обзор).

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
4семестр	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	9 баллов max	24 балла max	236 баллов max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 4 семестре

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения

материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий (4 семестр)

Занятие 1, 2. Треугольники. Сумма углов треугольника. Замечательные точки и линии треугольника. Теорема Пифагора. Признаки равенства треугольников.

На занятии систематизируются знания учащихся о треугольниках и его высотах, его медианах, учащиеся формулируют и доказывают теоремы о точке пересечения медиан, о подобии треугольников, выводят формулу нахождения медианы треугольника, если известны его стороны, формулируют и доказывают теоремы о точке пересечения высот, о подобии треугольников, образованных высотой, опущенной и вершины прямого угла данного треугольника; выводят формулу нахождения высоты треугольника, если известны его стороны; знакомятся с минимальным свойством треугольника.

Теорема. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Замечание: В случае тупоугольного треугольника основания его высот находятся на продолжениях сторон, прилежащих к тупому углу:

Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется ортоцентром.

Определение 2. Треугольник, образованный основаниями высот треугольника, называется ортоцентрическим.

Задания:

1. Доказать, что для произвольного треугольника ABC верно равенство: , где - радиус вписанной в треугольник окружности.

2. Пусть O, Q, M и H – соответственно центры описанной, вписанной окружностей, точка пересечения медиан и точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что если две любые из этих точек совпадают, то этот треугольник – равносторонний.

3. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, а на отрезках OB и OC выбраны точки B и C, для которых ABC = =ACB = . Доказать, что AB = AC. (Зарубежные математические олимпиады: Нью-Йорк, 76).

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется центроидом.

1. Длина медианы треугольника выражается формулой

m_a = ,
где a, b, c – длины сторон треугольника.

2. Для всякого треугольника выполняется соотношение:
$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = (a^2 + b^2 + c^2)$.

4. m_a, m_b и m_c – медианы треугольника. Докажите, что если $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ = , то треугольник равносторонний, где R – радиус описанной окружности.

Теорема. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется инцентром.

5. Пусть l_a, l_b, l_c – биссектрисы треугольника, p – его полупериметр. Докажите, что если $l^2_a + l^2_b + l^2_c = p^2$, то треугольник равносторонний.

6. Дан (ABC. Биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 его внутренних углов пересекаются в точке O. Известно, что треугольники AOB_1 и AOC_1 симметричны относительно прямой AO, треугольники A_1OB и BOC_1 – относительно BO, а треугольники A_1OC и B_1OC – относительно OC. Доказать, что (ABC – равносторонний.

Домашнее задание.
1. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, а на отрезках OB и OC выбраны точки B и C , для которых AB C = = AC B = . Доказать, что AB = AC .
2. Треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найдите углы треугольника. (Всероссийская олимпиада, 1964г.(Москва)).
3. Пусть m_a, m_b, m_c – медианы треугольника, а h_a, h_b, h_c – его высоты. Докажите, что если + + = 3, то треугольник равносторонний.

Занятие 3. Параллелограмм. Трапеция.

1. На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника ABCD отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что AM = CP, BN = DQ, BM = DP, NC = QA. Докажите, что ABCD и MNPQ — параллелограммы.

2. Пусть M — середина стороны BC параллелограмма ABCD. В каком отношении отрезок AM делит диагональ BD?

3. Стороны параллелограмма равны 2 и 4, а угол между ними равен 60o. Через вершину этого угла проведены прямые, проходящие через середины двух других сторон параллелограмма. Найдите косинус угла между этими прямыми.

4. Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

5. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 41, высота равна 40 и средняя линия равна 45. Найдите основания.

6. Середину более длинной боковой стороны прямоугольной трапеции соединили с вершинами трапеции. При этом трапеция разделилась на три равнобедренных треугольника. Найдите величину острого угла трапеции.

Домашнее задание.
1. Два различных параллелограмма ABCD и A1B1C1D1 с соответственно параллельными сторонами вписаны в четырехугольник PQRS (точки A и A1 лежат на стороне PQ, B и B1- на QR и т. д.). Докажите, что диагонали четырехугольника параллельны сторонам параллелограммов.

2. В трапеции ABCD с основаниями AB = a и CD = b проведён отрезок A1B1, соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции проведён отрезок A2B2, тоже соединяющий середины диагоналей, и так далее. Может ли в последовательности длин отрезков AB, A1B1, A2B2,... какое-то число встретиться дважды? Является ли эта последовательность монотонной (возрастающей или убывающей)? Стремится ли она к какому-нибудь пределу?

3. Основания трапеции равны a и b (a > b). Отрезки, соединяющие середину большего основания с концами меньшего основания, пересекают диагонали трапеции в точках M и N. Найдите MN.

Занятие 4, 5. Четырехугольники.

1. Угол между сторонами AB и CD четырехугольника ABCD равен j. Докажите, что AD2 = AB2 + BC2 + CD2 – 2(AB · BCcos B + BC · CDcos C + CD · ABcos j).

2. Середины M и N диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника ABCD не совпадают. Прямая MN пересекает стороны AB и CD в точках M1 и N1. Докажите, что если MM1 = NN1, то AD||BC.

3. Четырёхугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Найдите EF, если BC = 1.

4. Докажите, что если для вписанного четырехугольника ABCD выполнено равенство CD = AD + BC, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD.

5. Докажите, что если сумма косинусов углов четырёхугольника равна нулю, то он — параллелограмм, трапеция или вписанный четырёхугольник.

6. Четырёхугольник разделен диагоналями на четыре треугольника. Площади трёх из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвёртого треугольника. Найдите площадь данного четырёхугольника.

Домашнее задание.

1. В четырехугольник ABCD можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что AB > BC > KC, BK = 4 + , а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 14 и 7. Найдите DC.

2. В четырехугольник ABCD можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что BC > AB > KC, KC = 6 + , а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 22 и 11. Найдите DC.

3. В трапеции основания равны a и b, диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен A. Найдите площадь трапеции.

Занятие 6, 7, 8. Окружность. Углы связанные с окружностью. Вписанный и описанный четырехугольник.

Основные сведения

1. Угол ABC, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называют вписанным в окружность. Пусть O — центр окружности. Тогда

PABC = 1
2 PAOC,

если точки B и O лежат по одну сторону от AC, и PABC = 180° – 1
2 PAOC,

если точки B и O лежат по разные стороны от AC. Важнейшим и наиболее часто используемым следствием этого факта является то, что величины углов, опирающихся на равные хорды, либо равны, либо составляют в сумме 180°.

2. Величина угла между хордой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A, равна половине угловой величины дуги AB.

3. Угловые величины дуг, заключенных между параллельными хордами, равны.

4. Как уже говорилось, величины углов, опирающихся на одну хорду, могут быть равны, а могут составлять в сумме 180°. Для того чтобы не рассматривать различные варианты расположения точек на окружности, введем понятие «ориентированный угол между прямыми». Величиной ориентированного угла между прямыми AB и CD (обозначение: P(AB,CD)) будем называть величину угла. на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую AB так, чтобы она стала параллельна прямой CD. При этом углы, отличающиеся на n · 180°, считаются равными. Следует отметить, что ориентированный угол между прямыми CD и AB не равен ориентированному углу между прямыми AB и CD (они составляют в сумме 180° или, что по нашему соглашению то же самое, 0°).
Легко проверить следующие свойства ориентированных углов:
а) P(AB,BC) = – P(BC,AB);
б) P(AB,CD) + P(CD,EF) = P(AB,EF);
в) точки A,B,C,D, не лежащие на одной прямой, принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда P(AB,BC) = P(AD,DC) (для доказательства этого свойства нужно рассмотреть два случая: точки B и D лежат по одну сторону от AC; точки B и D лежат по разные стороны от AC).

ЗАДАЧИ

1.а) Из точки A, лежащей вне окружности, выходят лучи AB и AC, пересекающие эту окружность. Докажите, что величина угла BAC равна полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

б) Вершина угла BAC расположена внутри окружности. Докажите, что величина угла BAC равна полусумме угловых величин дуг окружности, заключенных внутри угла BAC и внутри угла, симметричного ему относительно вершины A.

2.Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC1 и PB1 на прямые AB и AC. Докажите, что PC1AP = PC1B1P.

1.Докажите, что если центр вписанной в четырехугольник окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей, то этот четырехугольник- ромб.

2.Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром O. Докажите, что PAOB + PCOD = 180°.

3.Докажите, что если существует окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырехугольника ABCD, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырехугольника перпендикулярны.

4.Окружность высекает на всех четырех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

Домашнее задание.

1Докажите, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то центр этой окружности лежит на одной прямой с серединами диагоналей.

2.Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром O. В треугольнике AOB проведены высоты AA1 и BB1, а в треугольнике COD- высоты CC1 и DD1. Докажите, что точки A1,B1,C1 и D1 лежат на одной прямой.

3. Углы при основании AD трапеции ABCD равны 2a и 2b. Докажите, что трапеция описанная тогда и только тогда, когда BC/AD = tg atg b.

Занятие 9, 10, 11. Подобные фигуры.

1. В треугольнике ABC на средней линии DE, параллельной AB, как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N. Найдите MN, если BC = a, AC = b, AB = c.

2. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S1, S2, S3. Найдите площадь данного треугольника.

3. В равнобедренный треугольник ABC (AB = BC) вписана окружность радиуса 3. Прямая l касается этой окружности и параллельна прямой AC. Расстояние от точки B до прямой l равно 3. Найдите расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC.

4. В трапеции ABCD диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD, а диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB. На продолжениях боковых сторон AB и DC за меньшее основание BC отложены отрезки BM и CN так, что получается новая трапеция BMNC, подобная трапеции ABCD. Найдите площадь трапеции ABCD, если площадь трапеции AMND равна P, а сумма углов CAD и BDA равна 60o.

5. Через точку A общей хорды BC пересекающихся окружностей проведена прямая, пересекающая окружности в таких точках D и E соответственно, что прямая BD касается одной окружности, а прямая BE — другой. Продолжение хорды CD одной окружности

пересекает другую окружность в точке F. Найдите отношение BD : BE, если AD = 8 и AE = 2. Сравните площади треугольников BDE и BDF.

6. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если BC = 4, а AK = 6.

Домашнее задание.
1. В выпуклом четырёхугольнике ABCD известно, что площадь треугольника ODC (O — точка пересечения диагоналей) есть среднее пропорциональное между площадями треугольников BOC и AOD. Докажите, что ABCD — трапеция или параллелограмм.
2. Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH, а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что треугольники MNC и ABC подобны.
3. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре подобных треугольника. Докажите, что его можно разрезать на два равных треугольника.

Занятие 12, 13, 14. Площадь фигур.

1. Отрезок AB есть диаметр круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M соответственно. Найдите угол CBD, если площади треугольников DCM и ACB относятся как 1:4.

2. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.

3. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника ABCD и пересекает сторону DC в единственной точке F и сторону BC в единственной точке E. Найдите площадь трапеции AFCB, если AB = 32, AD = 40 и BE = 1.

4. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырёхугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

5. Два прямоугольника положены на плоскость так, что их границы имеют восемь точек пересечения. Эти точки соединены через одну. Доказать, что площадь полученного четырёхугольника не изменится при поступательном перемещении одного из прямоугольников.

6. На катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника построены квадраты, расположенные вне треугольника. Вычислить площадь шестиугольника, вершины которого совпадают с теми вершинами квадратов, которые не принадлежат данному треугольнику. Длина гипотенузы c и сумма длин катетов s известны.

Домашнее задание.
1. Докажите, что площадь треугольника можно выразить по формуле S = (p - a)ra, где ra — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны, равной a, p — полупериметр треугольника.
2. В трапецию ABCD с основаниями BC и AD и боковыми сторонами AB и CD вписана окружность с центром O. Найдите площадь трапеции, если угол DAB прямой, OC = 2, OD = 4.

3. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в семь раз меньше площади четырёхугольника ABDE. Найдите хорду DE и радиус окружности, если AB = 4 и C = 45°.

Занятие 15 Контрольная работа.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Атанасян Л. С. Геометрия: в 2 ч.: учеб. пособие для физ. - мат. фак. пед. вузов / Л. С. Атанасян, Базылев, В. Т.; В. Т. Базылев. - 2-е изд., стер. - М.: КноРус, 2011. - Часть 1. - 396 с.: ил. - Список лит.: с. 391. (Библиотека УлГПУ).
2. Атанасян Л. С. Геометрия: в 2 ч.: учеб. пособие для физ. - мат. фак. пед. вузов / Л. С. Атанасян, Базылев, В. Т.; В. Т. Базылев. - 2-е изд., стер. - М.: КноРус, 2011. - Часть 2. - 422 с.: ил. - Список лит.: с. 417. (Библиотека УлГПУ).
3. Атанасян, С. Л. Сборник задач по геометрии : [в 2 ч.]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. вузов. Ч. 1. - М. : ЭКСМО, 2007. – 333. (Библиотека УлГПУ).
4. Атанасян, С. Л. Сборник задач по геометрии : [в 2 ч.]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. вузов. Ч. 2 - М. : ЭКСМО, 2008. (Библиотека УлГПУ).
5. Остыловский, А. Н. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. Н. Остыловский. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2011. - 92 с. - ISBN 978-5-7638-2196-3. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/443221
6. Ефимов Н.В. Высшая геометрия: учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, - 2011. -585 с. (http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=544579)

Дополнительная литература

1. Атанасян С.Л., Базылев В.Т. Геометрия Ч. 1. – М.: Просвещение, 1986 – 335с. (Библиотека УлГПУ).
2. Атанасян С.Л., Базылев В.Т. Геометрия Ч. 2. – М.: Просвещение, 1987 – 351с. (Библиотека УлГПУ).
3. Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учебное пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. - 2-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 496 с. (http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=515990)

Интернет-ресурсы

– http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал