Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической
работе
_____ С.Н. Титов

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Программа учебной дисциплины Предметно-методического модуля

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Экономика

(очная форма обучения)

Составитель: Глухова Н.В.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

–

Дисциплина «Алгебра и теория чисел» относится к дисциплинам обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) Предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Экономика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках школьного курса математики, дисциплиныЧисловые системы, практики: Предметный практикум по математике.

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин и прохождения практик: Теоретический и прикладной математический анализ, , Прикладные вопросы линейной алгебры в экономике, Анализ предпочтений потребителей, Исследование экономико-математических зависимостей, Математическая логика и теория алгоритмов Экономико-математические модели, Динамические системы в экономике, Математические методы в управлении и менеджменте, Теория игр в риск-менеджменте Оптимальное управление организационными системами, Основы бухгалтерского учета и аудита, Экономический анализ систем массового обслуживания, Оптимизационные методы в предпринимательстве, Стохастические динамические системы, Дополнительные главы математического анализа, Избранные вопросы алгебры и геометрии, для написания курсовых работ № 1 и № 2, для прохождения практикума по принятию экономических решений на основе математических методов и для прохождения государственной итоговой аттестации.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины является подготовка учителя к будущей профессиональной деятельности: формирование способности к преподаванию учебного предмета алгебра, как в обычных общеобразовательных классах, так и в классах с углубленным изучением математики.

Задачей освоения дисциплины является закрепление умений проводить математические преобразования выражений, отработка понятийного аппарата математики, техники проведения математических расчетов, формирование и закрепление умения проводить строгие абстрактно-логические доказательства, решать задачи повышенной сложности школьного курса математики.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	Знает	Умеет	владеет
ПК-12 - Способен выделять структурные элементы, входящие в систему познания предметной области (в соответствии с профилем и уровнем			

обучения), анализировать их в единстве содержания, формы и выполняемых функций. ПК-12.1. Знает формулировки определений, содержательное значение терминов и понятий предметной области, правила и алгоритмы оперирования с объектами предметной области, понимает взаимосвязь между структурными элементами; имеет представление о функциях и практическом применении изучаемых объектов. ПК-12.2. Умеет выделять и анализировать структурные элементы, входящие в систему познания предметной области; определять логическую взаимосвязь между компонентами предметной области; строить логически верные и обоснованные рассуждения; решать задачи предметной области.	ОР-1. Основные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач	ОР-2 Решать задачи по дисциплине, проводить доказательства, классифицировать и систематизировать основные изучаемые объекты, строить логически верные рассуждения	
ОПК-2 Способен участвовать в разработке основных и дополнительных образовательных программ,			

разрабатывать отдельные их компоненты (в том числе с использованием информационно-коммуникационных технологий). ОПК-2.2. Проектирует индивидуальные образовательные маршруты освоения программ учебных курсов, дисциплин (модулей), программ дополнительного образования в соответствии с образовательными потребностями обучающихся.		ОР -3. проектировать фрагменты программ учебных курсов, дисциплин, программ дополнительного образования, а также индивидуальных образовательных маршрутов с учетом образовательных потребностей обучающихся	

Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
1	3	108	18	30	-	33	экзамен (27)
2	4	144	24	40	-	53	экзамен (27)
3	3	108	18	30	-	33	экзамен (27)
4	3	108	18	30	-	33	экзамен (27)
5	3	108	18	30	-	33	экзамен (27)
Итого:	16	576	96	160	-	185	135

2. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
1 семестр				
Соответствия	12	20		20
Комплексные числа	6	10		13
Экзамен				27
Итого по 1 семестру	**18**	**30**	**-**	**60**
2 семестр				
Векторные пространства	14	26		33
Линейные операторы и квадратичные формы	10	14		20
Экзамен				27
Итого по 2 семестру	**24**	**40**	**-**	**80**
3 семестр				
Бинарные отношения	6	10		15
Основные алгебраические структуры	8	20		18
Экзамен				27
Итого по 3 семестру	**18**	**30**	**-**	**60**
4 семестр				
Многочлены от одной переменной	12	20		20
Многочлены от нескольких переменных	6	10		13

Экзамен				27
Итого по 4 семестру	**18**	**30**	**-**	**60**
5 семестр (теория чисел)				
Отношение делимости в кольце целых чисел	14	26		13
Основы теории сравнений	10	14		20
Экзамен				27
Итого по 5 семестру	**18**	**30**	**-**	**60**
Всего по дисциплине:	**96**	**160**	**-**	**320**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса (1 семестр)

1. Соответствия

Элементы математической логики. Множества и операции над ними. Свойства операций над множествами и высказываниями. Соответствия и их виды. Функции, биекции. Композиции функций, обратимые функции. Интерактивная форма: работа в микрогруппах. Бинарные отношения. Отношения эквивалентности и отношения порядка. Отношение делимости в целых числах. Классы эквивалентности и классы вычетов. Интерактивная форма: соревнование. Числовые сравнения.

2. Комплексные числа

Поле комплексных чисел как расширение поля действительных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа. Операции над комплексными числами. Решение уравнений второй степени над полем комплексных чисел. Геометрическое представление комплексных чисел. Корни из единицы как мультипликативная группа. Интерактивная форма: работа в микрогруппах, составление тестов.

Краткое содержание курса (2 семестр)

1. Векторные пространства

Матрицы и операции над ними, определители, обратные матрицы, матричные уравнения. Векторные пространства и подпространства Линейная зависимость и независимость конечной системы векторов. Ранг и базис системы векторов. Эквивалентные системы векторов, ступенчатые системы векторов и ступенчатые матрицы. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений. Способ Гаусса решения систем. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера

2. Линейные операторы и квадратичные формы

Линейные операторы. Матрицы линейных операторов. Переход от базиса к базису. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. Приведение матрицы линейного оператора к диагональной форме. Интерактивные формы: составление тестов, работы в микрогруппах. Билинейные и квадратичные формы. Скалярное произведение. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Критерий Сильвестра.

Краткое содержание курса (3 семестр)

1.Бинарные отношения

Бинарные отношения и их виды, рефлексивность, симметричность, транзитивность, отношение эквивалентности, отношение порядка. Сравнимость элементов. Кольцо классов вычетов. Разбиения. Виды отношений порядка, максимальные и минимальные, наибольшие и наименьшие элементы. Интрактивная форма: дискуссия.

2. Основные алгебраические структуры.

Алгебраические операции. Понятие алгебры как множества с алгебраическими операциями. Замкнутость множества относительно бинарной операции. Основные алгебраические системы (группы, кольца, поля) и их свойства. Подгруппы, подкольца. Сравнимость элементов группы по подгруппе, нормальные делители. Циклические группы. Идеалы, факториальные и евклидовы кольца. Поля и их основные свойства. Расширения полей.

Краткое содержание курса (4 семестр)

1. Многочлены от одной переменной и их корни

Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Теория делимости в кольце многочленов. НОД и НОК от двух и нескольких многочленов. Приложение к избавлению от иррациональности в знаменателе. Корни уравнений. Решение уравнений третьей и четвёртой степени. Теорема Безу, схем Горнера. Интерактивная форма: соревнование,

Неприводимые многочлены над различными полями. Неприводимые кратные множители. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Неприводимые над полем действительных чисел многочлены. Рациональные и действительные корни многочленов. Приближенные методы нахождения корней. Интерактивная форма: работа в микрогруппах, работа с компьютерными программами.

3. Многочлены от нескольких переменных

Кольцо многочленов от нескольких переменных. Лексикографический порядок. Симметрические многочлены, элементарные симметрические многочлены. Выражение симметрических многочленов через элементарные. Интерактивная форма: составление тестов

Краткое содержание курса (5 семестр)

1.Отношение делимости в кольце целых чисел

Предмет теории чисел, краткая история развития теории чисел. Теорема о делении с остатком. Отношение делимости в кольце целых чисел. НОД и НОК целых чисел, их свойства. Алгоритм Евклида и его приложения. Свойства взаимно простых чисел. Простые и составные числа. Бесконечность множества простых чисел в натуральном ряду. Теорема о разложении натурального числа на простые множители. Основная теорема арифметики. Каноническое разложение натурального числа. Сумма делителей $\sigma(n)$ и число делителей $\tau(n)$. Функция Эйлера $\varphi(n)$. Мультипликативность и явные формулы. Тождество Гаусса для функции Эйлера

2.**Основы теории сравнений.** Полная и приведенная системы вычетов по данному модулю и их свойства. Теоремы о вычетах линейных форм. Теоремы Эйлера и Ферма. Сравнение и система сравнений с неизвестной величиной. Решение системы сравнений с неизвестной величиной. Сравнения 1-ой степени. Теорема о числе решений сравнения 1-ой степени. Различные способы решения. Системы сравнений. Показатели чисел и классов

по данному модулю. Первообразные корни. Индексы чисел и классов по данному модулю. Свойства индексов. Применение индексов к решению сравнений 1-ой степени. Проверка правильности выполнения арифметических операций. Нахождение остатков от деления степеней числа. Решение неопределенных уравнений 1-ой степени. Вывод признаков делимости.

3. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным докладам (подготовка рефератов);
- решение задач (домашних заданий) по изучаемым темам;
- выполнение групповых интерактивных заданий.

Контрольная работа № 1 (1 семестр)

Примерный вариант контрольной работы № 1

1. Выяснить, справедливо ли равенство
$A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\setminus C$

2. Выяснить, является ли бинарное отношение ρ оно рефлексивным, симметричным, транзитивным, антирефлексивным, антисимметричным, отношением эквивалентности (если да, то найти классы эквивалентности, на которые данное отношение разбивает

множество действтельных чисел), отношением порядка (строгого порядка, линейного порядка)?

$m \rho n \Leftrightarrow 9m - n$ кратно 4.

3. Охарактеризуйте соответствия и найдите композиции fg и gf а) $xfy \Leftrightarrow y = x^2 + 1$; б) $xgy \Leftrightarrow \cos y = \cos x$

4. Выяснить является ли множество целых чисел кратных 7 группой относительно сложения, группой относительно умножения, кольцом, полем?

Контрольная работа № 2 (1 семестр)

1. Вычислить корень $\sqrt[5]{\dfrac{1-i}{-2+2i\sqrt{3}}}$ и результат записать в тригонометрической форме.

2. Геометрически описать множество комплексных чисел z, для которых $|z - 1| = 6$.

3. Выразить cos5x через cosx и sinx.

4. Найти все корни уравнения $x^4 + x^2 + 1$.

Контрольная работа № 3 (2 семестр)

Доказать, что множество векторов вида $\{(\alpha,\ 2\alpha+\beta,\ 3\alpha+3\beta\},\ \alpha,\beta\in R\}$ является подпространством пространства V_3. Найти базис подпространства и дополнить этот базис до базиса всего пространства.

2. Выяснить, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу, собственные значения и множество собственных векторов; если возможно привести матрицу этого оператора к диагональному виду и указать соответствующий базис:

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, 2x_1x_2)$.

Контрольная работа № 4 (3 семестр)

1. Выяснить является ли множество, состоящее из чётных подстановок подгруппой группы подстановок 3 степени. Если да, то найти правые и левые классы эквивалентности, правостороннее и левосторонне разложение группы по этой подгруппе, выяснить, является ли эта подгруппа нормальным делителем.

2. Выяснить является ли группа поворотов плоскости на углы, кратные $\pi/6$ циклической, найти порядки всех её элементов и все её подгруппы.

Контрольная работа № 5 (4 семестр)

Примерный вариант контрольной работы:

1.Найти НОД и НОК многочленов $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ и $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, а также подобрать многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ так, чтобы НОД был представлен в виде $f(x)\varphi(x) + g(x)\psi(x)$.

2. Решить уравнение: $x^3 - 6x^2 + 9x - 5 = 0$.

3. Представьте многочлен $2x^3+3x^2+6x-4$ в виде произведения неприводимых множителей а) над полем действительных чисел; б) над полем комплексных чисел.

Контрольная работа № 6 (5 семестр)

Примерный вариант контрольной работы:

1.Решить сравнения а) $9x\equiv 7 \pmod{10}$; б) $24x \equiv 18 \pmod{36}$; в) $37x\equiv 21 \pmod{117}$

2. Решить уравнение в целых числах 13x + 17y = 19
3. Представить в виде цепной дроби 9/13

Примерные темы рефератов и докладов

1 семестр

1. Арифметические прогрессии, содержащие бесконечно много простых чисел.
2. Числа рациональные и иррациональные.
3. Иррациональные числа.
4. Характеры Дирихле.
5. Оценки сумм с характерами.
6. Распределение значений характеров.
7. Характеры мультипликативной полугруппы натуральных чисел.
8. Теоретико-числовые работы П.Л. Чебышева.
9. Квадратичный закон взаимности.

2 семестр

1. Операторы проектирования в конечномерных пространствах
2. Унитарные операторы в конечномерных пространствах
3. Сопряжённые и самосопряжённые операторы в конечномерных пространствах
4. Полилинейные функции и тензоры
5. Конечномерные пространства с переменным базисом
6. Двойственные теоремы линейной алгебры
7. Практические применения собственных значений линейного оператора
8. Группы и алгебры линейных операторов
9. Нормы и сингулярные числа линейных операторов в конечномерных пространствах

3 семестр

1. Булевы алгебры
2. Группы и алгебры матриц
3. Конечные группы
4. Образующие элементы групп
5. Алгебраические основы теории кодирования
6. Применения теории групп
7. Группы Галуа и поля Галуа
8. Применение колец классов вычетов в компьютерной алгебре
9. Теория представления групп и ее применение в физике

4 семестр

1. Критерий Кронекера неприводимости многочленов над полем рациональных чисел
2. Критерий Эйзенштейна неприводимости многочленов над полем рациональных чисел
3. Разложение на множители многочленов от нескольких переменных
4. Разрешимость уравнений в квадратных радикалах
5. Разрешимость задач на построение с помощью циркуля и линейки
6. Поля Галуа
7. Методы работы с алгебраическими иррациональностями
8. Применение теории многочленов в кодировании.
9. Диаграммы Ньютона и их применения.

5 семестр

1. Основная теорема арифметики в различных кольцах.
2. Теорема Ван-дер Вардена об арифметических прогрессиях.
3. Магические квадраты.
4. Специальные простые числа.

5. Кольцо чисел Гаусса.
6. Арифметика квадратичных колец.
7. Дружественные и совершенные числа.
8. Число делителей и их сумма.

Групповое интерактивное задание 1.

Составление теста по одному из разделов алгебры
При помощи системы Moodle (http://do.ulspu.ru), либо любой другой программы по выбору микрогруппой студентов составляются 8 тестовых заданий по одному из разделов курса
Варианты:

1. Логические операции
2. Множества и операции над ними
3. Декартовы произведения множеств
4. Виды соответствий
5. Перестановки и подстановки
6. Группы, кольца, поля
7. Матрицы и операции над ними
8. Системы линейных уравнений
9. Векторные пространства и подпространства
10. Линейные операторы
11. Комплексные числа и операции над ними
12. Геометрическое представление и тригонометрическая форма комплексного числа
13. Бинарные отношения и их виды
14. Классы вычетов
15. Классы смежности группы по подгруппе
16. Циклические группы
17. НОД и НОК многочленов
18. Схема Горнера
19. Теорема Виета
20. Кратные множители многочлена
21. Корни многочленов
22. Приводимость многочленов над различными полями
23. Многочлены от нескольких переменных
24. Симметрические многочлены
25. Системы нелинейных уравнений

Групповое интерактивное задание 2.

Студенты по микрогруппам с использованием материалов, изученных в рамках дисциплины разрабатывают индивидуальный образовательный маршрут для школьника:
а) желающего подготовится к олимпиаде (разработка заданий по алгебре по разным разделам)
б) для школьника, интересующегося приложениями математики в экономике
в) для школьника, интересующегося приложениями математики в программировании.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Череватенко О.И., Рацеев С.М., Глухова Н.В., Кувшинова А.Н. Основы высшей алгебры. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2020. – 60 с.
2. Глухова Н.В., Череватенко О.И. Линейная алгебра. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2019. – 40 с.

3. Глухова Н.В., Череватенко О.И., Гришина С.А., Куренева Т.Н. Основы теории алгебраических структур. Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2019. – 23 с.
4. Глухова Н.В., Череватенко О.И. Алгебра. Часть 4. Алгебра многочленов Учебное пособие. – Ульяновск, ФГБОУ ВО, 2017. – 42 с.
5. Карпова С.А. Алгебра и теория чисел. Часть 1. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ, 1998. – 24 с.
6. Ильязова Д.З. Алгебра и теория чисел. Часть 2. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ.
7. Богомолова И.В., Ильязова Д.З. Алгебра и теория чисел. Часть 4. организационно-методические материалы для студентов заочников. – Ульяновск, УлГПУ, 1999. – 24 с.
8. Глухов В.П., Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть I. – Ульяновск: УлГПУ, 1996. – 58 с.
9. Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть 2. – Ульяновск: УлГПУ, 1999. – 36 с.

4. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Контрольная работа № 1 ОС-2 Контрольная работа № 2 ОС-3 Контрольная работа № 3 ОС-4 Контрольная работа № 4 ОС-5 Контрольная работа № 5	ОР-1. Знает основные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач ОР-2. Решает задачи по

	ОС-6 Контрольная работа № 6 ОС -7. Выступление по результатам группового интерактивного задания 1 ОС-8. Выступление по результатам группового интерактивного задания 2	дисциплине, проводить доказательства, классифицировать и систематизировать основные изучаемые объекты, строить логически верные рассуждения ОР-3. умеет проектировать фрагменты программ учебных курсов, дисциплин, программ дополнительного образования, а также индивидуальных образовательных маршрутов с учетом образовательных потребностей обучающихся
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **(Экзамен)** ОС-9-13 Экзамен в форме устного собеседования	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Примерный перечень вопросов к экзамену
1 семестр

1. Высказывания и операции над ними (отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция). Таблицы истинности, простейшие свойства.
2. Равносильность формул логики высказываний, тавтологии, противоречия, примеры.
3. Предикаты и операции над ними. Операции навешивания кванторов.
4. Операции над множествами, их свойства.
5. Соответствия (определение, виды, примеры).
6. Обратное соответствие, свойства обратных соответствий, определение обратимой функции, критерий обратимости.
7. Композиция соответствий и свойства композиций.
8. Функция, биекция, тождественное отображение. Примеры и свойства. Операция композиции функций.
9. Перестановки и подстановки
10. Четность подстановки
11. Произведение подстановок и обратные подстановки. Применение в информатике.
12. Понятие группы
13. Подгруппы
14. Понятие о кольце, простейшие свойства
15. Поле. Подполе, расширение поля.
16. Поле комплексных чисел.
17. Алгебраическая форма комплексного числа. Однозначность представления числа в алгебраической форме.
18. Определение комплексно-сопряжённого числа. Простейшие свойства операции комплексного сопряжения.

19. Арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.
20. Определение и геометрический смысл аргумента и модуля комплексного числа.
21. Геометрическое представление комплексных чисел в декартовой и полярной системе координат.
22. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Формулы связи между ними. Примеры перехода от одной формы записи к другой.
23. Тригонометрическая форма комплексного числа.
24. Умножение и деление чисел в тригонометрической форме (с доказательством),
25. Формула Муавра.
26. Корни n-ой степени из комплексного числа. Вывод формулы для извлечения комплексных корней, примеры.

2 семестр

1. Матрицы и операции над ними (свойства операций, примеры). Кольцо матриц.
2. Перестановки и подстановки.
3. Определитель квадратной матрицы (определение, вычисление определителей по определению, по правилу Саррюса)
4. Теорема о разложении определителя по строке или столбцу. Вычисление определителя при помощи разложения по строке или столбцу (пример).
5. Основные свойства определителей (с доказательствами). Примеры вычисления определителя при помощи основных свойств.
6. Обратная матрица. Формула для вычисления обратной матрицы с доказательством. Пример.
7. Матричные уравнения.
8. Правило Крамера.
9. Векторные пространства. Простейшие свойства, примеры.
10. Подпространства, критерий подпространства, примеры.
11. Ранг матрицы и системы векторов. Пример вычисления ранга.
12. Системы линейных уравнений, понятия о совместности, определённости систем, эквивалентности, элементарных преобразованиях систем.
13. Предложение о поведении системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях.
14. Теорема Кронекера – Капелли.
15. Способ Гаусса решения систем линейных уравнений. Понятие об общем и частном решении системы.
16. Системы линейных уравнений, понятия о совместности, определённости систем, эквивалентности, элементарных преобразованиях систем.
17. Предложение о поведении системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях.
18. Линейные операторы (определение, примеры линейных и нелинейных операторов, заданных в координатной форме).
19. Матричная форма линейных операторов.
20. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
21. Евклидовы пространства.
22. Скалярные произведения и билинейные формы
23. Квадратичные формы
24. Закон инерции.

3 семестр.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Бинарные отношения, виды примеры. Отношение эквивалентности.
2. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности.
3. Задание отношения эквивалентности с помощью разбиения множества на части.

4. Задание разбиения множества с помощью отношения эквивалентности.
5. Сравнения с одной неизвестной.
6. Отношение порядка, определение строгого порядка, линейного порядка, вполне упорядоченного множества, примеры.
7. Понятие о наибольшем, наименьшем, максимальном и минимальном элементах. Доказательство единственности наибольшего и наименьшего элементов.
8. Определение бинарной операции, полугруппы, моноида, нейтрального элемента, симметричного элемента. Свойства нейтральных и симметричных элементов.
9. Группы, коммутативные группы, примеры. Свойства групп.
10. Определение подгруппы, примеры. Доказательство критерия подгруппы.
11. Кольца (определение, примеры, простейшие свойства, связанные с операцией умножения).
12. Определение подкольца. Доказательство критерия подкольца.
13. Кольцо классов вычетов.
14. Определение поля, простейшие свойства, примеры.
15. Определение подполя, доказательство критерия подполя, примеры.
16. Поле комплексных чисел.
17. Группы, подгруппы. Сравнимость элементов группы по подгруппе. Доказательство того, что данное отношение является отношением эквивалентности.
18. Классы смежности группы по подгруппе. Левостороннее и правостороннее разложение группы. Метод нахождения классов смежности. Примеры.
19. Теорема Лагранжа.
20. Нормальный делитель группы. Свойства нормальных делителей.
21. Факторгруппа. Определение и доказательство того, что факторгруппа является группой. Примеры.
22. Порядок элемента группы. Свойства. Примеры.
23. Циклические группы. Примеры. Теоремы о связи порядка циклической группы и порядков её элементов.
24. Теорема о подгруппах циклической группы.
25. Кольца и идеалы. Критерий идеала. Тривиальные идеалы. Главные идеалы.
26. Сравнимость элементов по идеалу. Свойства сравнимости.
27. Классы вычетов. Факторкольцо кольца по идеалу.
28. Признак делимости на 9, применение вычетов при проверке правильности арифметических действий
29. Кольцо многочленов от одной неизвестной. Степень многочлена. Свойства степеней.
30. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов над полем. Алгоритм деления. Примеры.
31. Отношение делимости в кольце многочленов над полем. Свойства отношения делимости.

4 семестр.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Комплексные числа, тригонометрическая форма комплексного числа, извлечение корней из комплексных чисел.
2. Кольцо многочленов от одной неизвестной. Степень многочлена. Свойства степеней.
3. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов над полем. Алгоритм

деления. Примеры.

4. Отношение делимости в кольце многочленов над полем. Свойства отношения делимости.
5. Наибольший общий делитель (НОД) двух многочленов. Алгоритм Евклида.
6. Теорема о существовании и единственности НОД.
7. Свойства наибольшего общего делителя двух многочленов. Взаимно простые многочлены и их свойства.
8. Наименьшее общее кратное двух многочленов. Формула связи между НОД и НОК.
9. Приводимые и неприводимы многочлены и их свойства.
10. Корень многочлена. Теорема Безу и следствия из неё.
11. Кратные корни многочлена. Метод нахождения кратных множителей.
12. Теорема о числе корней многочлена. Необходимое и достаточное условие равенства многочленов над бесконечной областью целостности.
13. Деление многочлена на двучлен. Схема Горнера.
14. Разложение многочлена по степеням (x – a) с помощью схемы Горнера.
15. Основная теорема алгебры и следствия из неё.
16. Теорема Виета.
17. Решение уравнений 3-й степени способом Кардано.
18. Решение уравнений 4-й степени способом Феррари.
19. Свойство невещественных (комплексных) корней многочлена с действительными коэффициентами.
20. Приводимые и неприводимые многочлены над полем действительных чисел.
21. Теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами.
22. Теоремы о целых корнях многочленов целыми коэффициентами.
23. Приводимые и неприводимые многочлены над полем рациональных чисел. Критерий Эйзенштейна.
24. Верхние и нижние границы положительных и отрицательных действительных корней многочленов.
25. Кольцо многочленов от нескольких переменных, степени многочленов, однородные многочлены и их свойства.
26. Лексикографическое упорядочение многочленов. Свойства старшего члена.
27. Симметрические многочлены, свойства примеры.
28. Теорема о представлении произвольного симметрического многочлена в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

5 семестр.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Отношение делимости в кольце целых чисел Z и его свойства.
2. Деление целых чисел с остатком. Теорема о делении целых чисел с остатком.
3. НОД и НОК целых чисел. Алгоритм Евклида.
4. Взаимно простые числа и их свойства.
5. Основная теорема арифметики и следствия из нее.
6. Числовые функции σ и τ. Теоремы о вычислении значений функций σ и τ.
7. Конечная цепная дробь. Представление рационального числа в виде конечной дроби.
8. Подходящие дроби и их свойства.
9. Сравнение целых чисел и его свойства.
10. Кольцо классов вычетов.
11. Полная система вычетов.
12. Приведенная система вычетов.
13. Теоремы: о группе классов вычетов взаимно простых с модулем; о поле классов вычетов по простому модулю.

14. Функция Эйлера φ и ее мультипликативность.
15. Теоремы о вычислении φ (n); n ∈ N.
16. Теоремы Эйлера и Ферма. Следствие из теоремы Ферма.
17. Сравнения n-ой степени с одним неизвестным.
18. Линейные сравнения с одним неизвестным. Исследование решения.
19. Способы решения линейных сравнений с одним неизвестным.
20. Порядок числа, класса вычетов. Свойства порядка.
21. Первообразный корень. Теорема о числе первообразных корней по простому модулю.
22. Индекс числа по простому модулю. Свойства.
23. Таблица индексов, применение индексов для решения сравнений.
24. Признак делимости Паскаля и следствия из него.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
1, 3, 4, 5 семестры	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 Баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	9 баллов max	24 балла Max	236 баллов Max	300 баллов max

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
2 семестр	Разбалловка по видам работ	12 х 1=12 баллов	20 х 1= 20 Баллов	272 балла	96 баллов
	Суммарный макс. Балл	12 баллов Max	20 баллов max	304 балла Max	400 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 1, 3-5 семестров

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 2 семестра

Оценка	**Баллы (4 ЗЕ)**
«отлично»	361-400
«хорошо»	281-360
«удовлетворительно»	201-280
«неудовлетворительно»	200 и менее

5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий (семестр 1)

Далее указываются задания по пособию

Глухов В.П., Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть I. – Ульяновск: УлГПУ, 1996. – 58 с.

ПЗ-1 Элементы математической логики

Краткий опрос по теоретическому материалу.

Устно разбираются задачи 33 – 36.

Фронтально и у доски разбираются задачи 39, 43, 44, 48, 49 (6 - 10),

1. Даны четыре высказывания: p – «число a целое», q – «число a положительное», r – «a – число простое», s – «a делится на 3». Прочитайте следующие составные высказывания:

а) $(p \wedge r) \to s$;

б) $p \wedge s \to \neg r$;

в) $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$;

г) $\neg p \vee \neg s$;

д) $(p \wedge q \wedge r) \vee s$.

2. Укажите порядок действий:

а) $(p \to q) \to \neg r \wedge (\neg s \vee t)$;

б) $(\neg p \to q \wedge r) \to \neg s \vee p$;

в) $p \to (q \to \neg r) \wedge (s \to \neg p \vee q)$;

г) $(p \vee q) \wedge \neg s \to p \vee q \vee \neg s$.
3. Составьте таблицы истинности для следующих формул и найдите среди них тавтологии и противоречия:
а) $(p \to q) \to ((\neg p \to \neg q) \to \neg p)$;
б) (д/з) $((p \to q) \to p) \to q$;
в) $(p \wedge (q \wedge \neg p)) \wedge ((\neg q \to p) \vee q)$;
г) (д/з) $((p \wedge \neg q) \to q) \to (p \to q)$;
д) $p \wedge (q \wedge (\neg p \vee \neg q)$;
е) (д/з) $((p \vee \neg q) \to q) \wedge (\neg p \vee q)$;
ж) $(p \to q) \wedge (q \to p) \wedge \neg r \to p$;
з) $(p \to q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r \to \neg p$;
и) $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r \to (\neg q \to p)$;
к) $(p \wedge q) \to r \leftrightarrow p \to (q \to r)$;
л) (д/з) $(p \wedge q) \to r \leftrightarrow (p \wedge \neg r) \to \neg q$;
м) (д/з) $(p \to (q \to r)) \wedge (\neg t \vee p) \wedge \neg q \to (t \to r)$;
н) $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg t \vee p) \wedge r \to (t \to q)$;
п) (д/з) $(p \to q) \wedge (\neg r \to \neg q) \wedge (t \to \neg r) \to (p \to \neg t)$.
Ответ: а и г, ж, и, к, л, н, п – тавтологии, д – противоречие.
Интерактивная форма: По микрогруппам студенты формулируют математические предложения, а затем передают их другим студентам, которые записывают для них логическую формулу. Затем для данных формул составляются таблицы истинности.
Рекомендуемая литература:
Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 5 – 35.
Глухов В.П., Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть I. – Ульяновск: УлГПУ, 1996. – стр. 11, 17.

ПЗ-2. Элементы математической логики

Задания к занятию.

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Фронтально и у доски разбираются задачи 53, 54, 55, 58, 81.
Решаются задачи:
1. Каково наибольшее число формул, которые могут быть одновременно истинными: p, q, $\neg q \wedge \neg p$, $p \to \neg q$, $p \leftrightarrow q$, $(p \vee \neg q) \wedge \neg (p \wedge \neg q)$.
2. Каково наибольшее число утверждений, которые могут быть одновременно истинными:
а) Джо хитрец;
б) Джо не везёт;
в) Джо везёт, но он не хитрец;
г) Если Джо хитрец, то ему не везёт;
д) Джо хитрец тогда и только тогда, когда ему везёт,
е) Либо Джо хитрец, либо ему не везёт, но не то и другое одновременно.
3. Один из трёх братьев испачкал скатерть. Алёша сказал: «Это сделал не Витя, это Боря». Боря сказал: «Это сделал Витя, а не Алёша». Витя сказал: «Я знаю, что это не Боря, а я сегодня не делал уроки». Кто испортил скатерть и кто сказал неправду, если известно, что врал только один мальчик.
2. Один из пяти детей разбил окно.
Андрей: «Это мог сделать только Витя, либо Толя».
Витя: «Я окно не разбивал и Коля тоже».
Толя: «Вы оба говорите неправду».
Дима: «Нет, Толя, один из них сказал правду, а другой неправду».
Коля: «Ты не прав, Дима».

Кто разбил окно, если трое мальчиков сказали правду.
4. Один из четырёх лиц А, Б, В и Г совершил преступление. А сказал, что это был не Б. Б сказал, что это либо В, либо Г. В сказал, что это либо А либо Б, а Д сказал, что это либо А, либо С. Кто совершил преступление, если лжёт только преступник.
Домашнее задание № 49 (1 – 5), 51, 56.
Рекомендуемая литература:
Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 5 – 35.
Глухов В.П., Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть I. – Ульяновск: УлГПУ, 1996. – стр. 11, 17.

ПЗ – 3-4. Множества и операции над ними
На занятии 3 устно разбираются задачи 1, 4. Фронтально и у доски разбираются задачи 2 (1, 2), 3 (1 – 3), 7, 12 (1), 14, 16 (1 – 3).
Домашнее задание № 2 (3 – 5), 3 (4 – 6), 5, 6, 12 (2), 16 (4 – 6).
На занятии 4 осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов). Далее решаются № 21 (1 – 4), № 22 (4, 5, 9, 12).
Домашнее задание № 21 (5, 8 – 12), 22 (1 – 3, 6 – 8, 13).
Рекомендуемая литература:
Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 39 – 47.
Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука. – 1973. – стр. 11 – 12.

ПЗ – 5. Декартово произведение множеств
Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Фронтально и у доски разбираются задачи 26 (1, 2), 27, 29, 30 (1 - 3).
Домашнее задание № 26 (3 – 4), 28, 30 (4 – 6).
Рекомендуемая литература:
Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 48 – 49.
Глухов В.П., Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть I. – Ульяновск: УлГПУ, 1996. – стр. 9 – 10.
ПЗ-6 Соответствия, виды соответствий
Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Фронтально и у доски разбираются задачи 86, 87, 89 (1), 90 (1, 2), 91 (1 – 5), 93.
Домашнее задание № 89 (2), 90 (3, 4), 92 (6 – 9).
Рекомендуемая литература:
Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 49 – 53.
Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Физматлит. – 1977. – стр. 40 – 42.

ПЗ – 7. Композиция соответствий, обратное соответствие, функции
Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Фронтально и у доски разбираются задачи 88, 89 (3), 90 (5), 96 (1, 2), 99, 100, 101.
Домашнее задание № 94, 96 (3), 98, 103.
Рекомендуемая литература:
Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 54 – 64.
Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Физматлит. – 1977. – стр. 42 – 46.
ПЗ-8. Перестановки и подстановки
1. Какие из следующих соответствий являются подстановками. Записать подстановки в стандартном виде и найти среди них равные:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,
г) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить произведение подстановок:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$(д/з)

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 4 & 3 & 1 & 7 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 1 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ (д/з).

3. Найдите чётности у всех подстановок из задания 1 и 2 и у их произведений.

4. Найдите обратные для всех подстановок из задания 1 и 2. Определите чётности обратных подстановок.

ПЗ-9. Контрольная работа № 1.
ПЗ-10. Группы, подгруппы

1. Пользуясь критерием подгруппы и тем, что множество всех действительных чисел – группа по сложению, а множество всех действительных чисел без нуля – группа по умножению, определите, какие из перечисленных множеств образуют группу относительно сложения, группу относительно умножения:

а) Целые числа; Целые числа, кратные 5; Нечётные целые числа; Рациональные числа; Положительные рациональные числа; рациональные числа без 0; $M = \{a + b\sqrt{2}$, где a, b $\in Q\}$, $A = \{1, -1, 0\}$, $C = \{3^n, n \in Z\}$.

б) (д/з) Натуральные числа; целые числа, кратные трём; Четные целые числа; $D = \{5k - 1, k \in Z\}$, $A = \{k^2, k \in Z\}$иррациональные числа, $B = \{1, -1\}$, $M = \{a + b\sqrt{3}$, где a, b $\in Z\}$, $C = \{3^n, n \in Z\}$.

2. Определите, какие из найденных в задании 1 групп являются подгруппами других групп из того же задания.

Домашнее задание № 131 (чётные).

ПЗ-11. Кольца, поля

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Устный опрос по определениям.
Фронтально и у доски разбираются задачи 141, 142, 143, 144 (1, 3), 145 (1 – 5), 146, 147.
Домашнее задание № 144 (4, 5), 145 (6 – 9), 148.
Рекомендуемая литература:
Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 104 – 112.
Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука. – 1973. – стр. 39 – 52.

ПЗ-12 Поля

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Устный опрос по определениям.
Фронтально и у доски разбираются задачи 141, 142, 143, 144 (1, 3), 145 (1 – 5), 146, 147.
Домашнее задание № 144 (4, 5), 145 (6 – 9), 148.
Рекомендуемая литература:
Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 146 – 148.
Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – М.: Просвещение, 1966. – стр. 5 – 8, 216 – 229.

ПЗ 13 Поле комплексных чисел, алгебраическая форма комплексного числа
Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Фронтально и у доски разбираются задачи 159, 160, 161, 162 (1), 163 (1), 165, 167.
Домашнее задание № 162 (2), 163 (2), 166, 167 (8 – 12).
Рекомендуемая литература:
Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 157 – 163.
Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – М.: Просвещение, 1966. – стр.8 – 21.
ПЗ-14. Геометрический смысл и тригонометрическая форма комплексного числа
Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Фронтально и у доски разбираются задачи 168, 173, 175 (1 – 4), 179 (1 – 3), 180, 181 (1 – 3, 6), 187 (нечётные).
Домашнее задание № 175 (5 – 8), 179 (2), 181 (4, 5, 7, 8), 187 (чётные).
Рекомендуемая литература:
Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 163 – 169.
Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – М.: Просвещение, 1966. – стр. 21 – 24.
ПЗ-15. Действия над числами в тригонометрической форме.
Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Фронтально и у доски разбираются задачи 189 (4 – 6), 190 (1, 2), 192 (1, 2, 7, 8), 193, 194, 198, 199.
1.Вычислите с помощью перехода к тригонометрической форме:
а) $(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i)(-\frac{\sqrt{2}}{6}+i\frac{\sqrt{6}}{6})$; б) $(6+2i\sqrt{3})(-3-3i)$
в) $\frac{1+i}{3+i3\sqrt{3}}$; г) $\frac{-2+i2\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$; д) $(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^{10}$; е) $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^{6}$
ж) $\frac{(\sqrt{3}-i)^4(1+i)^5}{(1+i\sqrt{3})}$; з) $\frac{(i+\sqrt{3})^5}{(i-1)^6}$.
2. Найдите корни n-ой степени из 1
а) n = 3; б) n = 4; в) n = 2; г) n = 6.
3. Вычислите и результат представьте в тригонометрической форме:
а) $\sqrt{\frac{3-3i}{i+\sqrt{3}}}$; б) $\sqrt{\frac{-2-2i}{i-1}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{1-i}{-2+2i\sqrt{3}}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{-1+i}{1+\sqrt{3}i}}$.
4. Вычислите и результат представьте в алгебраической форме:
а) $\sqrt{-3+4i}$; б) $\sqrt{15+8i}$
5. Решите уравнения:
а) $x^2 + 2x + 3 = 0$;
б) $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$;
в) $x^2 - (3 + 2i)x + 5 + i = 0$;
г) $z\bar{z}+2\bar{z}=3+2i$;

Планы практических занятий (Семестр 2)

Далее указываются задания по пособию
Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть 2. – Ульяновск: УлГПУ, 1999. – 36 с.

ПЗ-1. Векторные пространства и подпространства.
Фронтально и у доски разбираются задачи 1, 2 (1- 4), 3, 5, 13 (1 – 2), 14, 15 (3 – 6).

1. Доказать, что множество векторов вида $\{(\alpha, 2\alpha+\beta, 3\alpha+3\beta\}, \alpha,\beta\in R\}$ является подпространством пространства V_3.
2. Выяснить, образует ли векторное пространство множество векторов вида $\{(\alpha, \alpha\beta, \alpha+\beta\}, \alpha,\beta\in R\}$.

3. Доказать, что векторными пространствами над полем действительных чисел являются:

а) арифметическое векторное пространство,

б) множество матриц размера 3х3 с действительными коэффициентами,

в) множество всех многочленов степени не выше n,

г) поле комплексных чисел,

д) поле действительных чисел.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию: № 2 (5 – 8), 4, 6, 13 (3), 15 (1 – 2).

ПЗ-2. Линейная зависимость и независимость конечной системы векторов

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов). Фронтально и у доски разбираются задачи 1, 2 (1- 4), 3, 5, 13 (1 – 2), 14, 15 (3 – 6). Доказываются все свойства линейно зависимых систем из лекции.

1) Вычислить линейную комбинацию $a_1 + a_2 – 3a_3$ для систем векторов:

а) $a_1(1,2,3)$, a_2 (1,1,1), a_3 (3,2,1);

б) $a_1(4, 2, 3,-1,5)$, $a_2(2, 1, -1, 3, -2)$, a_3 (2,1,-6,10,-11);

в) (д/з) $a_1(3,-2,4,-1,-1,2)$, a_2 (-5,3,2,0,-4,3), a_3 (8,-5,3,4,1,-3);

г) (д/з) $a_1(1, 1, 1, 1)$, $a_2(1, 0, 0, 0)$, a_3 (0, 1, -2, 1).

д) $f_1(x)=x^4+x^3$, $f_2(x) = x^4 - x^3$, $f_3(x) = 8x^4+4x^3$,

е) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить линейные комбинации $a_1(1, 0, 1, 2)$, $a_2(1, 1, 0, 1)$, a_3 (1,1,0,1), a_4 (3,2,2,4):

а) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4$;

б) $a_2 – a_1 – 3a_3$;

в) $– 3a_1 + a_4$;

г) $a_1 + a_2 + a_3 – a_4$.

Является ли эта система линейно независимой?

3. Определить, какие из данных систем линейно независимы:

а) $a_1(1, 2, 3)$,

б) a_1 (0, 0, 0),

в) a_3 (3,2,1), a_4 (6,4,2);

г) (д/з) $a_1(4, 2)$, $a_2(1, 1)$, a_3 (-6, -6),

д) a_1 (2,1,9,-11,16), a_2 (10, 5,10,-6,17);

е) (д/з) $a_1(3,-2,4)$, a_2 (-5,3,2), a_3 (8,-5,3), a_4 (7,-5,19), a_5 (11,12,-15);

ж) $a_1(1, 0, 1, 2)$, $a_2(1, 1, 0, 1)$, a_3 (1,1,0,1), a_4 (3,2,2,3), a_5 (2, 1,2,2);

з) (д/з) $a_1(3, -4, 1, 2)$, $a_2(1, -1, -1, -1)$, a_3 (0, 0, 0, 0), a_4 (4,-3,1,2), a_5 (1, -6, 1, 2);

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:
№ 2 (5 – 8), 4, 6, 13 (3), 15 (1 – 2).

ПЗ-3. Базис и ранг конечной системы векторов

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов). Фронтально и у доски разбираются задачи 18 (нечётные), 19, 20, 22, 23 (1).

1. Найти ранг и базис системы векторов, выразите все векторы системы через базисные:

а) $a_1(1,2,3)$, a_2 (1,1,1), a_3 (3,2,1), a_4 (4,4,1);

б) $a_1(4, 2, 3,-1,5)$, $a_2(2, 1, -1, 3, -2)$, a_3 (2,1,-6,10,-11), a_4 (2,1,9,-11,16), a_5 (10, 5,10,-6,17);

в) (д/з) $a_1(3,-2,4,-1,-1,2)$, a_2 (-5,3,2,0,-4,3), a_3 (8,-5,3,4,1,-3), a_4 (7,-5,19,1,-10,9), a_5 (11,12,-15,8,17, -20);

г) $a_1(1, 0, 1, 2)$, $a_2(1, 1, 0, 1)$, $a_3(1,1,0,1)$, $a_4(3,2,2,3)$, $a_5(2, 1,2,2)$;
д) $a_1(3, -4, 1, 2)$, $a_2(1, -1, -1, -1)$, $a_3(3,-4,1,2)$, $a_4(4,-3,1,2)$, $a_5(1, -6, 1, 2)$;
е) (д/з) $a_1(1, 1, 1, 1)$, $a_2(1, 0, 0, 0)$, $a_3(0, 1, -2, 1)$, $a_4(0, 2, 0, -2)$,
ж) $f_1(x)=x^4+x^3$, $f_2(x) = x^4 - x^3$, $f_3(x) = 8x^4+4x^3$,
з) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:
№ 18 (чётные), 21, 23 (2 -3).

ПЗ-4. Ранг матрицы.

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Фронтально и у доски разбираются задачи 18 (нечётные), 19, 20, 22, 23 (1).
Работа по микрогруппам – вычисление рангов матриц разными путями – на скорость.
Вычислить ранги следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & -9 & 21 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 11 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ 15 & 11 & 9 & 13 & 19 \\ 17 & 10 & 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$,

г) (д/з) $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \\ 6 & -1 & 5 \\ 2 & -15 & 9 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ж) (д/з) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию: № 18 (чётные), 21, 23 (2 -3).

ПЗ-5. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса (неоднородные системы)

Фронтально и у доски разбираются задачи 39 (нечётные), 40, 41.
Решаются системы:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 4x_4 &= -8, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + x_4 &= 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1, \\ 9x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -1, \\ 6x_1 + 13x_2 - 10x_3 - 7x_4 &= 3, \\ 2x_1 - 23x_2 + 12x_3 - 13x_4 &= -5, \\ x_1 + 9x_2 - 5x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Интерактивная форма – последняя система решается по микрогруппам на скорость, затем обсуждается наилучший подход к решению.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:
№ 39 (чётные).
В конце занятия самостоятельная работа.

ПЗ-6. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса (однородные системы)

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются 45 (1 – 3).
Решить системы и найти фундаментальную систему решений:
а)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 2x_5 &= 0, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 12x_2 + 13x_3 - x_4 + 5x_5 &= 0. \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 &= 0, \\ 4x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию: № 45 (4 – 6), ОС-6.

ПЗ-7. Кольцо матриц

1. Даны матрицы:

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Выяснить образует ли данное множество группу по сложению, группу по умножению.

2. Докажите, что множество матриц размера 2х2 является кольцом

3. Укажите сумму элементов последней строки матрицы C = 2A - B, где

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

4. Укажите сумму элементов первого столбца матрицы C = AB, где

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Укажите размерности матриц и транспонированные к ним.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; г) $(2 \quad 4 \quad 7)$.

6. Найдите сумму и произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -6 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -6 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -12 \\ -1 & 5 & 0 \\ -4 & 1 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 1 & 11 \\ 7 & -3 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2, & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3, & -6, & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & -4 \\ -9 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 6 & 4 \\ 8 & -2 & -4 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

ПЗ – 8. Определители и их свойства

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Фронтально и у доски разбираются задачи 59, 60, 62, 64 (1 – 3).
Чему равен определитель матрицы

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

интерактивные формы - работа по микрогруппам: студенты составляются в микрогруппах по три человека, каждый составляет матрицу размера 3х3, затем перемножает матрицы двух других студентов в микрогруппе, вычисляет определитель получившейся матрицы, затем совместно проверяют свойство определителя произведения. При наличии времени тоже выполняется с матрицами размера 2х2.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 61, 64 (2).

ПЗ – 9. Определители и их свойства

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Фронтально и у доски разбираются задачи 65, 69.
Доказываются свойства определителей, не доказанные на лекции.

1. Чему равен определитель матрицы A = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -11 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{vmatrix}$

2. Вычислить произведение и найти определитель каждой матрицы, входящей в произведение, и результата умножения.

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & 9 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите определитель матрицы

а) $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ б) (д/з) $\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:
№ 67, 68, задание 3 (б) .

Рекомендуемая литература:

Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – СПб.:Лань, 2009. – 335 с.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.
Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть II. – Ульяновск: УлГПУ, 1999. – 36 с.

ПЗ – 10. Определители и их свойства

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Фронтально и у доски разбираются задачи: № 63.

1. Чему равен определитель матрицы A = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -11 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{vmatrix}$

2. Если определитель матрицы $\begin{pmatrix} -3 & a \\ b & 7 \end{pmatrix}$ равен $\frac{1}{6}$, чему равен определитель матрицы

$\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 23 & -3 & b \\ 22 & a & 7 \end{pmatrix}$?

3. Известно, что определитель матрицы $\begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ равен D. Чему равны определители следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda u & \lambda v & \lambda w \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & u & x \\ b & v & y \\ c & w & z \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} a-x & b-y & c-z \\ x+2u & y+2v & z+2w \\ 3u+a & 3v+b & 3w+c \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} a-x & b-y & c-z \\ x+2u & y+2v & z+2w \\ 3x+a & 3y+b & 3z+c \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} a-x & b-y & c-z \\ x+2u & y+2v & z+2w \\ 3u+x & 3v+y & 3w+z \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} a-x & b-y & c-z \\ x+2u & y+2v & z+2w \\ 3x+u & 3y+v & 3z+w \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} a-x & b-y & c-z \\ x+2u & y+2v & z+2w \\ 3a+x & 3b+y & 3c+w \end{pmatrix}$ и) $\begin{pmatrix} a-x & b-y & c-z \\ x+2u & y+2v & z+2w \\ 3a+u & 3b+v & 3c+w \end{pmatrix}$

Ответы: а) λ^3D, б) D, в) – D, г) – D, д) 8D, е) -2D, ж) 5D, з) 8D, и) 5D.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:
№ 66 .

Рекомендуемая литература:

Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – СПб.:Лань, 2009. – 335 с.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007**.** – 432 с.
Ильязова Д.З. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть II. – Ульяновск: УлГПУ, 1999. – 36 с.

ПЗ-11.Обратные матрицы

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Фронтально и у доски разбираются задачи 70 (нечётные), 71, 72 (1, 2), 73, 74, 75.

1. Найти матрицу обратную к матрице, если она существует:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, г) (д/з) $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ж) (д/з) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Решить матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

б) $A(1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию: № 70 (чётные), 72 (3).

ПЗ- 12 Линейные операторы и их матрицы

Фронтально и у доски разбираются задачи 101(1 – 2), 102, 103 (3 - 5), 104, 105

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Выяснить, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу:

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_3, 3x_3)$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, 2x_1x_2)$

в) $A(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - 6x_3, 4x_1 - 4x_3, 4x_1 - 6x_3)$

г) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2, 1)$

д) $A(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 2x_3, 8x_1 + x_2 - 4x_3, 12x_1 – 5x_3)$

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 101 (3 – 4), 103 (1, 2), 106.

Выяснить, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти его матрицу:

е) $A(x_1, x_2, x_3) = (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 – 2x_2 - x_3, 0)$ (д/з)

ж) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$ (д/з)

и) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3, 2x_3)$ (д/з)

л) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 4x_3, x_1^2)$ (д/з)

м) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$ (д/з)

ПЗ-13. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Устный опрос по определениям.

Фронтально и у доски разбираются задачи 120 (нечётные), 121.

Решаются задания: Найдите собственные векторы, собственные значения и собственные подпространства операторов. Укажите алгебраические и геометрические кратности соответствующих собственных значений. Выясните, какие из операторов можно привести к диагональному виду, а какие нет. В случае, если это возможно, осуществить переход к диагональному виду, найти соответствующий базис и матрицу перехода к данному базису. Выполнить проверку.

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_3, 3x_3)$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - 6x_3, 4x_1 - 4x_3, 4x_1 - 6x_3)$

в) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3, 2x_3)$ (д/з)

г) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$ (д/з)

д) $A(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 2x_3, 8x_1 + x_2 - 4x_3, 12x_1 – 5x_3)$

е) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$.

ПЗ-14. Скалярное произведение

1. Пусть вектор $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Выяснить, можно ли скалярное произведение задать следующим способом:

а) $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$

б) $(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$

в) $(x, y) = x_1y_1 – x_2y_2$

г) $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$

д) $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

е) $(x, y) = |x_1y_1| + |x_2y_2|$

ж) $(x, y) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$

Если можно, то вычислить скалярное произведение векторов x(1, 1) и y (-3, 2), нормы каждого из векторов и угол между ними.

2. Найти скалярное произведение векторов x и y, длину каждого из векторов и угол между ними, если скалярное произведение задано стандартным способом.

а) x (1, - 1, 2, 3), y (1, 2, 3, -1)

б) x (2, 3, 6, -1), y (4, 6, 12, -2)

в) x (1, 2, 3, 4), y (4, 3, 2, 1)

г) x (1, 1, - 1, 1), y (1, 2, -1, -2).

3. Выяснить можно ли скалярное произведение задать формулами

а) $(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ б) $(f,g)=\int_{0}^{1}(f(x)+g(x))dx$.

Если возможно, вычислить скалярное произведение и угол между $f = x$, $g = x^2$.

ПЗ15. Квадратичные формы

1. Найти матрицу квадратичной формы и привести её к каноническому виду. Определить вид квадратичной формы и указать индексы инерции

а) $x_1^2+ 2x_1x_2+ 4x_2^2$

б) $x_1x_2 + 2x_1^2+ 2x_2^2 +4x_2x_1$

в) $x_1^2+ x_1x_2+ 4x_2^2$ (д/з)

г) $x_1^2+ 4x_1x_2+ 4x_2^2$ (д/з)

д) $x_1^2+ 2x_1x_2+ x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2$

е) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

ж) $2x_2^2 +4x_2x_3$ (д/з)

з) $x_1^2+ x_1x_2+ 4x_3^2 + x_1x_3+ 4x_2x_3$.

ПЗ-16. Критерий Сильвестра. Закон инерции

1. По заданным матрицам найдите квадратичные формы, приведите их к каноническому виду и определите их индексы инерции:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ е) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. Пусть вектор $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Выяснить, можно ли скалярное произведение задать следующим способом:

а) $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$

б) $(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$

в) $(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$

г) $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$

ПЗ-17. Отчет о выполнении интерактивного задания.

ПЗ-18-19 Выступления с докладами.

ПЗ-20. Контрольная работа.

3 семестр

ПЗ – 1. Бинарные отношения.

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются задачи 106 (2), 107, 108, 109, 110 (1 – 3).

Домашнее задание № 106 (3), 110 (4 – 16).

Рекомендуемая литература:

Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 65 – 70 .

Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука. – 1973. – стр. 17 – 20.

ПЗ-2.Отношение эквивалентности

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).

Фронтально и у доски разбираются следующие задачи:

1. Постройте всевозможные разбиения множества {1, 2, 3, 4} на классы.

2. Задано разбиение множества: $\{1, 2, 3, 4\}\cup\{5, 6, 7\} \cup \{8, 9, 10\}$. Выписать все возможные пары эквивалентных элементов.

3. Найти разбиение множества целых чисел на классы эквивалентности, если отношение эквивалентности ρ задано по правилу $x\rho y \Leftrightarrow (x - y) \vdots m$.

а) $m = 5$, б) $m = 8$, в) $m = 6$ (д/з), г) $m = 7$ (д/з).
4. Выяснить, являются ли отношениями эквивалентности следующие отношения, заданные на множестве всевозможных прямых на плоскости
а) $a \rho b$ $\Leftrightarrow$ прямая a параллельна прямой b,
б) $a \rho b$ $\Leftrightarrow$ прямая a перпендикулярна прямой b,
в) $a \rho b$ $\Leftrightarrow$ прямая a пересекает прямую b.

ПЗ-3. Сравнимость чисел по модулю. Отношение делимости
Доказательства свойств делимости чисел. Решаются задачи. Вводится определение:
Целые числа a и b называются сравнимыми по натуральному модулю m (обозначение $a \equiv b \pmod m$), если разность между нимии делится на m.
Эквивалентное определение – Целые числа a и b называются сравнимыми по натуральному модулю m, если остатки от деления на m у этих чисел равны.
1. Доказать, что данные определения эквивалентны.
2. Доказать, что отношение сравнимости является отношением эквивалентности.

ПЗ-4. Классы вычетов.
Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
1. Постройте все классы вычетов по модулю 7 и 6. Найдите сумму, разность, произведение классов [4] и [5] в соответствующем множестве.
2. Выписать три положительных и три отрицательных элемента, сравнимых
    а) с числом 3 по модулю 5
    б) с числом 2 по модулю 6.
3. Найдите НОД и НОК чисел 117 и 111999.

3. Выписать все элементы, сравнимые с числом 3 по модулю 5
(д/з) с числом 2 по модулю 6.
4. Доказать свойства:
а) $a \equiv b \pmod m \wedge c \equiv d \pmod m \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod m$;
б) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow ac \equiv bc \pmod m$;
в) $a \equiv b \pmod m \wedge c \equiv d \pmod m \Rightarrow ac \equiv bd \pmod m$.
Таким образом, можно ввести следующую операцию сложения для классов вычетов (классов эквивалентности по отношению сравнимости по модулю m)
$[a]_m + [b]_m = [a + b]_m$. Аналогично вводится операция умножение.
5. Постройте таблицы сложения и умножения для всех классов вычетов по модулю
а) 5, б) 6, в) (д/3) 7, г) 2.

ПЗ-5. Отношение порядка, упорядоченные множества
Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Фронтально и у доски разбираются задачи 118, 119, 121 - 123.
Домашнее задание № 120, 124.
Рекомендуемая литература:
Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 71 – 73.
Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука. – 1973. – стр. 20 – 23.
ПЗ-4. Группы и подгруппы
Задания для самостоятельного решения
ПЗ-5. Кольца
Задания для самостоятельного решения

Осуществляется разбор домашнего задания (проверка ответов, выяснение вопросов).
Устный опрос по определениям.
Фронтально и у доски разбираются задачи 141, 142, 143, 144 (1, 3), 145 (1 – 5), 146, 147.
Домашнее задание № 144 (4, 5), 145 (6 – 9), 148.
Рекомендуемая литература:
Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа. – 1979. – стр. 104 – 112.
Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука. – 1973. – стр. 39 – 52.

ЗАНЯТИЕ № 6. Классы смежности группы по подгруппе

Задания для самостоятельного решения:

1. Даны подстановки:

$a_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $a_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$,

$a_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $a_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Найти все подгруппы и все нормальные делители данной группы. Построить левые и правые классы смежности по всем нетривиальным подгруппам.

2. Даны матрицы:

$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,

Найти все подгруппы и построить левые и правые классы смежности по всем этим подгруппам.

3. Найдите классы смежности аддитивной группы векторов плоскости, выходящих из начала координат, по подгруппе векторов, лежащих на фиксированной прямой, проходящей через начало координат.

ЗАНЯТИЕ № 7. Нормальные делители группы

Задания для самостоятельного решения:

1. Докажите, что множество самосовмещений правильного треугольника образует группу. Найдите все подгруппы данной группы. Найдите левые и правые классы смежности по всем подгруппам. Укажите те из них, которые являются нормальными делителями.

2. Докажите, что множество поворотов квадрата образует подгруппу его самосовмещений. Найдите левые и правые классы смежности. Является ли эта подгруппа нормальным делителем.

3. Доказать, что множество всех чётных подстановок четырёхэлементного множества образует подгруппу всех подстановок данного множества. Докажите, что она является нормальным делителем. Постройте факторгруппу.

ЗАНЯТИЕ № 8. Порядок элемента в группе

Задания для самостоятельного решения:

Найдите порядки всех элементов:

а) в аддитивной группе классов вычетов по модулю 8 ($\mathbf{Z}_8$),

б) в аддитивной группе классов вычетов по модулю 9 ($\mathbf{Z}_9$),

в) в мультипликативной группе всех классов вычетов по модулю 5 ($\mathbf{Z}_5$) без нуля (предварительно проверить, что это множество является группой по умножению)

г) в мультипликативной группе всех классов вычетов по модулю 7 ($\mathbf{Z}_7$) без нуля (предварительно проверить, что это множество является группой по умножению).

ЗАНЯТИЕ № 9. Циклические группы

Задания для самостоятельного решения:

1. Найдите порядок каждого элемента в мультипликативной группе корней степени n из 1. Выяснить является ли эта группа циклической, найти образующие элементы.

а) n = 5, б) n = 6, в) n = 8, г) n = 7.

2. Доказать, что аддитивная группа целых чисел - циклическая.

3. Даны подстановки:

$a_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$,

$a_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Выяснить, является ли данная группа циклической. Найти все её циклические подгруппы

ЗАНЯТИЕ № 10. Выступление докладами

ЗАНЯТИЕ № 11. Кольца и идеалы

Задания для самостоятельного решения:

Выясните, являются ли идеалами в данных кольцах (a, b – произвольные действительные числа) следующие множества:

а) целые числа в кольце комплексных чисел;

б) комплексные числа вида a + ai, где a действительное число, в кольце комплексных чисел;

в) множество матриц вида $\begin{pmatrix}a & a\\ a & a\end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка;

г) множество матриц вида $\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка;

д) множество матриц вида $\begin{pmatrix}a & a\\ b & b\end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка;

е) множество матриц вида $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ в кольце матриц второго порядка

ЗАНЯТИЕ № 12. Классы вычетов

Задания для самостоятельного решения:

1. Докажите, что множество целых чисел, кратных некоторому числу n, является идеалом кольца целых чисел. Постройте все классы вычетов по модулю 7 и 6. Укажите факторкольца. Найдите сумму, разность, произведение классов [4] и [5] в соответствующем множестве.

2. Выписать три положительных и три отрицательных элемента, сравнимых

а) с числом 3 по модулю 5

б) с числом 2 по модулю 6.

ЗАНЯТИЕ № 13. Кольцо многочленов

Задания для самостоятельного решения:

Найти НОД и НОК многочленов f(x) и g(x).

а) $f(x) = x^4 – 3x^3 + 3x^2 – 3x + 2$, $g(x) = x^3 – 2x^2 – x + 2$

б) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$, $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2$

в) $f(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x + 2$, $g(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 2$

г) $f(x) = x^6 + 6x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, $g(x) = x^5 + 6x^4 + 4x^2 + 4x + 6$

ЗАНЯТИЕ №14. Выступление с докладами. Защита рефератов

ЗАНЯТИЕ № 15. Контрольная работа

4 семестр

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1. Теория делимости в кольце многочленов

1. Разделить многочлен f(x) на многочлен g(x) с остатком. Выписать соответствующую теорему о делении с остатком.

а) $f(x) = 2x^5 – 5x^3 – 8x$, $g(x) = –x^2 +2x– 3$
б) $f(x) = 2x^5 – 6x^3 + 2x – 8$, $g(x) = 3x^2 + 3$
в) $f(x) = 2ix^3 + (1+i)x^2 – x$, $g(x) = (1+i)x – (2 – 2i)$
г) $f(x) = 3x^6 – 2x^4 + 6x^3 – 8x + 11$, $g(x) = 2x^2 + 3x – 5$.

2. Доказать свойства делимости многочленов в бесконечных полях:

а) Каждый многочлен делится сам на себя;
б) Если многочлен f(x) делится на многочлен g(x), а g(x) делится на f(x), то эти многочлены ассоциированы (отличаются друг от друга на постоянный множитель);
в) Если f(x) делится на g(x), а g(x) делится на h(x), то многочлен f(x) делится на h(x);
г) Если f(x) и g(x)делятся на h(x), то и их сумма, разность и произведение делятся на h(x);
д) Если один из множителей в произведении делится на f(x), то и всё произведение делится на f(x);
е) каждый многочлен делится на любую константу, отличную от 0.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:
№ 1 (в, г)

Рекомендуемая литература:
Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.
Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2. Наибольший общий делитель многочленов (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) многочленов

1. Найти НОД и НОК многочленов f(x) и g(x).

а) $f(x) = x^4 – 3x^3 + 3x^2 – 3x + 2$, $g(x) = x^3 – 2x^2 – x + 2$
б) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$, $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2$
в) $f(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x + 2$, $g(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 2$
г) $f(x) = x^6 + 6x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, $g(x) = x^5 + 6x^4 + 4x^2 + 4x + 6$

2. Найти НОД многочленов f(x) и g(x) и подобрать такие многочлены φ(x) и ψ(x), чтобы НОД(f(x), g(x)) = f(x) φ(x) + g(x)ψ(x):

а) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $g(x) = x^3 – 2x^2 + x – 2$;
б) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 12$, $g(x) = x^3 – 2x^2 – 13x – 10$
в) $f(x) = x^3 – x^2 – 4x – 6$, $g(x) = x^3 + x^2 – 10x – 6$
г) $f(x) = x^5 – x^3 + 2x^2 – 2x + 2$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x + 6$
д) $f(x) = x^4 + x^3 – 3x^2 – 6x – 3$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
е) $f(x) = x^6 + x^5 – 3x^4 + 2x^3 + 4x – 2$, $g(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x + 6$
ж) $f(x) = x^3 + 3x + 3$, $g(x) = x^2 – x – 2$
з) $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:
№ 2 (д, е, ж)

Рекомендуемая литература:
Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.
Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3. Схема Горнера

1. Пользуясь схемой Горнера, разделить f(x) на (x – a)

а) $f(x) = x^4 – 3x^3 + x – 1$, a = 2

б) $f(x) = 9x^3 + 8x^2 – 10x$, a = – 3 (д/з)

в) $f(x) = 4x^3 + x^2$, a = – 1 – i

2. Пользуясь схемой Горнера, найти значение f(x) в точке a

а) $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 – 8x + 40$, a = – 3

б) $f(x) = x^4 – 3x^3 + 6x^2 – 10x + 16$, a = 4(д/з)

в) $f(x) = 3x^4 – x + 300i$, a = – 3 + i

3. Используя схему Горнера, разделить f(x) на g(x)

а) $f(x) = 2x^5 – 5x^3 – 8x$, $g(x) = –x – 3$

б) $f(x) = 2x^5 – 5x^3 – 8x$, $g(x) = 3x + 3$

в) $f(x) = 2ix^3 + (1+i)x^2 – x$, $g(x) = (1+i)x – (2 – 2i)$ (д/з)

г) $f(x) = 3x^6 – 2x^4 + 6x^3 – 8x + 11$, $g(x) = 2x + 3$ (д/з)

4. Разложить многочлен f(x) по степеням (x – 2) и найдите значение многочлена и всех его производных при x = 2.

а) $2x^5 – x^3 – 2x^2 – 6x + 10$

б) $4x^3 – 2x^2 + 5x – 1$ (д/з)

5. Пользуясь схемой Горнера, раскрыть скобки (разложить по степеням x)

а) $(x + 3)^4 – 3(x + 3)^3 + 5(x + 3) – 2$

б) $2(x – 3)^6 + 7(x – 3)^5 + (x – 3)^3 – 5(x – 3)^2 + 4$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 1 б, № 2 б, № 3 (в, г), №4 б.

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4. Теорема Безу(

1. Показать, что если многочлен f(x) с целыми коэффициентами принимает при x равном 1, 2, 3, 4 значения равные некоторому простому числу p, то он не может принимать значение 2p ни при каком целом x.

2. Многочлен f(x) при делении на (x – 1) даёт остаток 1, при делении на (x – 2) даёт остаток 3, при делении на (x – 3) остаток 5 и при делении на (x – 4) остаток 6. Найти остаток от деления f(x) на произведение (x – 1)(x – 2)(x – 3)(x – 4).

Ответ: $(-1/6)x^3 + x^2 + (1/6)x$

3. Найти остаток от деления многочлена $f(x) = 1 + x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ на

а) $x^2 – 1$

б) $x^2 + 1$

в) $x^4 – 1$

Ответы: а) 6x + 1, б) 1; в) $3x^3 + 3x + 1$.

4. Найти значение f(x) в точке a

а) $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 – 8x + 40$, a = – 3

б) $f(x) = x^4 – 3x^3 + 6x^2 – 10x + 16$, a = (д/з)

в) $f(x) = 3x^4 – x + 300i$, a = – 3 + i

5. Докажите, что если k – кратное 3 натуральное число, то $x^k + 1$ делится на $x^2 – x + 1$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 3 (в), № 4 б.

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5. Приводимые и неприводимые многочлены

1. Разложить на неприводимые множители над полем комплексных чисел.

а) $x^2 + x + 1$
б) $x^4 + 1$
в) $x^4 + x^2 + 1$
г) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$
д) $x^6 – 27$
е) $x^4 + 8x^3 + 8x – 1$
ж) $2x + 2$.
з) $6x^2 + x + 3$
и) $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$
к) $x^6 – 1$
л) $x^2 + 2x + 3$
м) $x^4 – 7$

Интерактивная форма – микрогруппы составляют многочлдены по заданным корням (все корни рациональные, а затем предлагают другим микрогруппам разложить данные многочлены на множители на скорость.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 1 (з - м)

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6. Отделение неприводимых кратных множителей

1. Выделить кратные множители многочленов.

$x^6 – 3x^5 + 6x^3 – 3x^2 – 3x +2$,

а) $f(x) = x^5 – 15x^3 – 10x^2 + 60x + 72$,
б) $f(x) = x^5 – 7x^3 – 2x^2 + 12x + 8$, (д/з)
в) $f(x) = x^5 – x^4 + 2x^3 – 2x^2 + x – 1$,
г) $f(x) = x^6 + 6x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, (д/з)
д) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$,
е) $f(x) = x^6 + 4x^5 + 5x^4 – 5x^2 – 4x – 1$,

2. Найдите НОД многочлена и его производной:

а) $f(x) = (x – 1)^3(x + 1)^2(x – 3)$,
б) $g(x) = (x – 1)(x^2 – 1)(x^3 – 1)(x^4 – 1)$.

3. Найдите все значения а при которых многочлен $x^4 – 4x + a$ не имеет кратных корней.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 1 (б, г)

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7. Решение уравнений третьей степени

1. Найти все комплексные корни уравнений:

а) $x^3 – 9x^2 + 21x – 5 = 0$
б) $x^3 – x – 6 = 0$
в) $x^3 – 3x^2 + 3 = 0$ (д/з)
г) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$ (д/з)
д) $x^3 – 6x + 9 = 0$
е) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$
ж) $x^3 – 3x^2 – 3x + 11 = 0$
з) $x^3 + 3x^2 – 3x – 1 = 0$.

Интерактивная форма – микрогруппы составляют уравнения третьей степени с иррациональными корнями и передают его другим микрогруппам для решения на скорость

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 1 (в, г)

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007**.** – 432 с.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8. Решение уравнений четвёртой степени

Найти все комплексные корни уравнений:

а) $x^4 + 8x^3 + 15x^2 – 4x – 2 = 0$

б) $x^4 – 2x^3 + 2x^2 + 4x – 8 = 0$

в) $x^4 – x^3 – x^2 + 2x – 2 = 0$

г) $x^4 – 4x^3 + 3x^2 + 2x – 1 = 0$ (дополнительно)

д) $x^4 + 2x^3 – 2x^2 + 6x – 15 = 0$ (д/з)

е) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x – 7 = 0$ (д/з)

ж) $x^4 – x^3 – 3x^2 + 5x – 10 = 0$ (д/з)

з) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 – 1 = 0$

и) $x^4 – 2x^3 + x^2 + 2x – 1 = 0$

к) $x^4 – 2x^3 + 4x^2 – 2x + 3 = 0$

л) $x^4 – 2x^3 + 3x^2 – 2x – 2 = 0$

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 1 (д, е, ж)

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007**.** – 432 с.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9. Теорема Виета, многочлены над полем действительных чисел

1. Составить нормированный многочлен наименьшей степени над полем комплексных чисел, имеющий корни:

а) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = 2$ Ответ: $x^4 – 4x^3 + 3x^2 + 4x – 4$

б) $x_1 = i$, $x_{2,3} = 1$. Ответ: $x^3 + (-2 + i)x^2 + 2x + 2$

в) $x_{1,2} = 1$, $x_{3,4,5} = -1$ (д/з) Ответ: $x^5 + x^4 – 2x^3 – 2x^2 + x + 1$

г) $x_{1,2} = i$, $x_{3,4} = -i$. (д/з) Ответ: $x^4 + 2x^2 + 1$

д) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ Ответ: $x^3 – 6x^2 + 11x – 6$

е) $x_{1,2} = i$, $x_{3,4} = 1 + i$. Ответ: $x^4 – (2+4i)x^3 – (5 – 6i)x^2 + (6+2i)x – 2i$

2. Найдите соотношения коэффициентов нормированного кубического многочлена, при котором один корень равен сумме двух других.

3. Не решая квадратного уравнения, составьте новое уравнение, корнями которого были бы величины, обратные квадратам корней данного уравнения:

а) $2x^2 – x + 1$;

б) $x^2 + x + 6$.

4. Найдите все многочлены вида $x^2 + px + q$, для которых коэффициенты p, q являются корнями.

5. Найдите все значения a при которых многочлены $x^2 – ax + 2$ и $x^2 + ax + 2$ имеют общий корень.

6. Выяснить какие из многочленов неприводимы над полем действительных чисел. приводимые разложить на неприводимые множители

а) $x^3 + x^2 – 2$ ж) $x^3 + 9x^2 + 9x + 8$

б) $x^4 + 1$
в) $x^4 + x^2 + 1$
г) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$
д) $x^6 – 27$
е) $x^4 + 8x^3 + 8x – 1$
з) $x^3 – 6x^2 + 11x – 6$
и) $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$
к) $x^6 – 1$
л) $x^2 + 2x + 3$
м) $x^4 – 7$

7. Найти нормированный многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий:
а) простой корень $2+i$ и двукратный корень 1.
б) простой корень – 3 и двукратный корень $1 – i$.

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:
№ 1 (в,г), № 6 (и - м), №2 б. Подготовка к контрольной.

Рекомендуемая литература:
Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.
Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №10. Многочлены над полем рациональных чисел

1. Найдите рациональные корни многочлена:
а) $x^3 – 11x^2 + 38x – 40$
б) $3x^4 – 2x^3 + 4x^2 – x + 2$
в) $15x^5 – 8x^4 + 46x^3 + 21x^2 – 21x + 3$
г) $x^5 + 6x^4 + 4x^3 – 23x^2 – 30x – 8$ (д/з)
д) $6x^4 + x^3 + 2x^2 – 4x + 1$ (д/з)
е) $3x^5 + 17x^4 + 36x^3 + 38x^2 + 19x + 5$

2. Выяснить, являются ли данные многочлены приводимыми над полем рациональных чисел. Если да, то разложить многочлены на множители над этим полем
а) $3x^2 – 2x – 1$
б) $2x^2 – 3x + 4$
в) $2x^3 + 3x^2 + 6x – 4$
г) $2x^3 + 12x^2 + 17x – 2$
д) $2x^8 + 14x^3 – 35x^2 – 56x + 63$
е) $x^4 – 2x + 3$ (замена $x = y + 1$)
ж) $2x^4 + 9x^3 + 20x^2 +15x + 32$ (замена $x = y – 2$)

3. Выяснить, являются ли данные многочлены приводимыми над полем рациональных чисел. Если да, то разложить многочлены на множители над этим полем
а) $x^2 – x + 0.25$
б) $3x^3 + 4x^2 + 4x + 4$
в) $x^3 + x^2 – x – 1$
г) $30x^3 + 19x^2 – 1$
д) $2x^5 – 15x^3 + 21x – 24$
е) $3x^6 – 20x^4 + 30x^2 – 20x + 20$
ж) $4x^7 + 21x^5 + 28x^4 – 14x^2 – 35$

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:
№ 1 (г, д), № 2 (б, г), № 3(ж)

Рекомендуемая литература:
Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.
Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №11. Контрольная работа.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №12. Отделение действительных корней многочлена

1.С помощью способа Ньютона найти верхние и нижние границы положительных и отрицательных корней многочленов.
а) $f(x) = x^4 – 3x^3 + 8x^2 + 7x – 6$,
б) $f(x) = 2x^5 + 8x^4 – 11x^3 + 21x^2 + 12x – 31$(д/з),
в) $f(x) = x^6 – 2x^4 – 2x^3 – 2x^2 – 2x + 6$,
г) $x^4 – 4x^3 + 7x^2 – 8x + 3$,
д) $x^5 + 7x^3 – 3$,
е) $x^4 + 4x^3 – 8x^2 – 10x + 14$.
2. Пользуясь теоремой Штурма, отделить действительные корни многочлена
а) $f(x) = x^4 – 4x^3 + 4x^2 – 4$,
б) $f(x) = x^4 – 4x^3 + 12x^2 – 4x – 8$, (д/з)
в) $f(x) = x^3 – 3x – 3$,
г) $x^4 – 12x^2 – 16x – 4$,
д) $x^4 – x – 1$,
е) $x^4 + x^2 – 1$,
ж) $x^5 + x^4 – 4x^3 – 3x^2 + 3x + 1$,
з) $x^5 – 5x^4 + 10x^2 – 5x – 3$.
Интерактивная форма: микрогруппы составляют уравнения четвертой степени с иррациональными корнями, которые приближенно оценивают с помощью микрокалькуляторов. Другие микрогруппы ищут корни данных многочленов методом Штурма на скорость.
Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:
№ 1 (в, г)
Рекомендуемая литература:
Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.
Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №13. Многочлены от нескольких переменных. Симметрические многочлены
1. Расположите члены следующих многочленов в лексикографическом порядке.
а) $x_1 + x_2 + x_3$
б) $3x_1^2 + 3x_2^2 + x_2$
в) $x_1 x_2 + x_2x_{13}$
г) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 – 3x_1x_2x_3$
2. Какие из многочленов являются симметрическими? Укажите их старшие члены.
а) $(x_1 – x_2)(x_1 – x_3)(x_2 – x_3)$
б) $(x_1 – x_2)^2 (x_1 – x_3)^2 (x_2 – x_3)^2$
в) $(x_1 – x_2 – x_3)(x_2 – x_1 – x_3)(x_3 – x_1 – x_2)$
г) $(x_2^3 + x_1^2x_3 – x_3^3)(x_1^2 – x_1^2x_2x_3)(x_1^3x_2^2 – x_1^4 + x_2^2)$
д) $2\sigma_1^4 \sigma_2^3\sigma_3^2$
е) $2\sigma_1^2 \sigma_2\sigma_3^3$
3. Среди перечисленных одночленов укажите те, которые могут быть старшими членами симметрических многочленов:
а) $x_1^5 x_2^3x_3^5$; б) $x_2^5 x_3^4x_4^3$ в) $x_1^5 x_2^5x_3^5$; г) $x_1^4 x_2^4x_3$; д) $x_2^5 x_3x_1^4$; д) $x_2^4 x_3x_1^5$;
4. Выразите следующие многочлены через основные (элементарные) симметрические многочлены:
а) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 – 2x_1^2x_2^2 – 2x_1^2x_3^2 – 2x_2^2x_3^2$
б) $(2x_1 – x_2 – x_3)(2x_2 – x_1 – x_3)(2x_3 – x_1 – x_2)$
в) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 – 2x_1x_2 – 2x_1x_3 – 2x_2x_3$ (д/з)
г) $(x_1 – x_2)^2 (x_1 – x_3)^2 (x_2 – x_3)^2$ (д/з)
Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 4 (в, г),

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №14. Применения симметрических многочленов

1. Вычислить значения симметрического многочлена f(x) от всех комплексных корней многочлена φ(x)

а) $f(x_1, x_2, x_3) = S(x_1^3 x_2)$, $\varphi(x) = 2x^3 + 2x^2 + 4$

б) Найдите сумму кубов комплексных корней многочлена

$\varphi(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 6x + 1$

2. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x^6 + y^3 = 65 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^3 - y^3 = 8 \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \\ xy = 8 \end{cases}$

3. Решите уравнение:

$x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9$

Содержание внеаудиторной работы студента при подготовке к занятию:

№ 2 (б, г), № 3.

Рекомендуемая литература:

Кострикин А.И. Введение в алгебру. – 3-е изд. – М.: Физматлит. – 2001. – 368 с, М.: МЦНМО, 2009.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.:Лань, М.: Физматкника, 2007. – 432 с.

ЗАНЯТИЕ №15. Выступление с докладами. Защита рефератов

5 семестр

ЗАНЯТИЕ № 1. Метод математической индукции

Доказать равенства для любого натурального n: д/з

а) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; в) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; г) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Докажите, что для любого натурального n

а) $n^3 - n$ делится на 3.

б) $n^7 - n$ делится на 7

в) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7

г) $2^{2n+1} \cdot 3^{n+3} + 1$ делится на 11

ЗАНЯТИЕ №2. Простые и составные числа. Отношение делимости.

Доказательство свойств делимости. НОД и НОК.

1. Выяснить, является ли число простым или составным. Если число составное, то разложить его на простые множители
   а) 6643 б) 1769 в) 997 г) 2520
   д/з д) 6497 е)1817 ж) 6600 з) 3551
2. Разложите на простые множители а) 26! б) (д/з) 16!
3. Найти все простые числа между а) 2320 и 2350 б) (д/з) 2640 и 2680
4. Доказать, что всякое простое число, большее 3, представимо в виде $6k \pm 1$
5. Найдите все возможные значения простого числа p, если известно, что $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$ – тоже простые.

6. Найдите все возможные значения простого числа p, если известно, что p + 10 – простое и p + 14 – простое.
7. Доказать, что если p – простое число, p > 3, то $(p^2 - 1) \vdots 24$

ЗАНЯТИЕ №3. Простые и составные числа

1. Выясните, является ли число 2237 (113) простым или составным.

2. Показать, что при любом натуральном n > 1, число $n^4 + n^2 + 1$ составное.

3. Доказать, что при всяком целом n
а) $n^3 - n$ делится на 3;
б) $n^5 - n$ делится на 5;
в) $n^7 - n$ делится на 7;
г) $n^{11} - n$ делится на 11;
д) $n^{13} - n$ делится на 13.

4. Доказать, что при всяком целом n
а) $3^{6n} - 2^{6n}$ делится на 35 (здесь $n \geqslant 0$);
б) $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120;
в) $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121.

Занятие 4. Числовые функции. Функции τ и σ

1. Найти количество и сумму натуральных делителей числа 360, 957 (д/з числа 750, 375).
2. Найдите НОД и НОК чисел 360 и 504.
3. Сумма двух чисел 667, а отношение их НОК к НОД равно 120. Найти эти числа.
4. Найдите целое положительное число, зная, что оно имеет два простых делителя, число всех делителей равно 6, а сумма всех делителей – 28.
5. Число N имеет два простых делителя, N^2 имеет 15 различных н1.атуральных делителей. Сколько делителей имеет N^3 (ответ 28)
6. Число $N = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot 7^{\gamma}$. 5N имеет на 8 делителей больше, чем N, 7N имеет на 12 делителей больше, чем N, 8N имеет на 18 делителей больше, чем N. Найдите это число.
7. Число $N = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$. Если N разделить на 2, то у нового числа будет на 30 делителей меньше, чем у N, если N разделить на 3, то у нового числа будет на 35 делителей меньше, чем у N, если N разделить на 5, то у нового числа будет на 42 делителей меньше, чем у N. Найдите это число.

Занятия 5. Системы вычетов.

1. Написать полную и приведённую систему наименьших положительных и наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю 10 (по модулю 12).
2. Показать, что числа образуют полную систему вычетов
а) 25, -20, 16, 46, - 21, 18, 37, -17 по модулю 8.
б) 32, - 9, 15, 42, - 18, 30, 6 по модулю 7.
3. Показать, что числа образуют приведённую систему вычетов
а) 19, 23, 25, -19 по модулю 12
б) 11, -1, 17, -19.
4.Известно, что числа 2077 и 100 при делении на натуральное число а дает некоторое натуральное частное и одинаковый натуральный остаток. Найдите все такие а.
5. Написать 3 вида (наименьшие неотрицательные, набольшие неположительные, наименьшие по абсолюной величине) как полной, так и приведенной системы вычетов По модулю 20, по модулю 13 (д/з).

Занятие 6. Цепные дроби.

4. Разложите в цепную дробь 13/67, 99/170.

5. Представьте цепную дробь |2; 1, 1, 3, 1, 2| (|3, 2, 2, 7| в виде обыкновенной.

6. С помощью разложения в цепную дробь сократить $\frac{1043}{3427}, \frac{3953}{871}$.

Занятие 7. Функция Эйлера.

Функция Эйлера φ(a) – количество чисел меньших, чем a и взаимно простых с a. Функция Эйлера мультипликативна (φ(ab) = φ(a) φ(b), если (a,b) = 1). Если число a представлено каноническим разложением $a = q_1^{\alpha 1} q_2^{\alpha 2} \dots q_n^{\alpha n}$, то

$$\varphi(a) = a\ (1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{1}{q_2})\dots(1-\frac{1}{q_n})$$

1. Найти функцию Эйлера от чисел: 375, 720, 17, 31, 5·7·13, 3^5

Д/з 988 (отв. 432), 1200 (отв. 320), 71, 43, 12·17 (отв. 64), 5^4 (отв. 500).

2. Число имеет два простых делителя, разность между которыми равна 2. Функция Эйлера от числа равна 120. Найдите это число (отв. 143).

Д/з Число $a = 3^{\alpha}5^{\beta}7^{\gamma}$, φ(a) = 3600. Найти a. (отв. 7875).

3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 16 (д/з 36, отв. 12).

4. Найти количество натуральных чисел, меньших 300 и имеющих с ним наибольший общий делитель число 20. Ответ: 8. (д/з числа, меньшие, чем 1665, НОД = 37, отв. 24)

Если (a, m) = 1, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

Теорема Ферма: Если целое число a не делится на простое число p, то

$a^{p-1} \equiv a \pmod p$.

5. Найти остаток от деления:

а) 109^{345} на 14 (отв. 1) б) 439^{291} на 60 (отв. 19) в) $3^{80} + 7^{80}$ на 11 (отв 2)

Д/з г) 385^{175} на 45 (отв. 32) д) 293^{275} на 48 (отв. 29) е) $3^{100} + 5^{100}$ на 7 (отв 6).

6. Найти последние две цифры числа 2^{100}. Ответ 76. (д/з последние 3 цифры 243^{402} – ответ 049).

Занятие 8. Линейные сравнения с одним неизвестным

1. Путём испытаний наименьших неотрицательных вычетов найти решения сравнений:

а) $5x^2 – 15x + 22 \equiv 0 \pmod 3$ б) $x^2 + 2x + 2 \equiv 1 \pmod 5$ – отв. 1, 2.

2. Решить сравнения по простому модулю на основании их свойств:

а) $12x \equiv 1 \pmod 7$; б) $6x \equiv 3 \pmod 7$; в) $6x + 5 \equiv 1 \pmod 7$

Д/з г) $6x + 5 \equiv 6 \pmod 7$; д) $3x + 4 \equiv 2 \pmod 5$; е) $15x + 4 \equiv 7 \pmod{11}$

3. Решить сравнения способом Эйлера:

а) $3x \equiv 1 \pmod 5$ Д/з в) $5x \equiv 6 \pmod 7$ отв. 4.

4. Решить сравнения:

а) $20x \equiv 10 \pmod{25}$; б) $5x \equiv 7 \pmod{10}$; в) $10x \equiv 25 \pmod{35}$

Д/з г) $12x \equiv 9 \pmod{15}$ д) $12x \equiv 9 \pmod{18}$; е) $14x \equiv 22 \pmod{36}$.

Отв. 2, 7, 12 нет 17, 35

4. Решить сравнения пользуясь разложением в цепную дробь

а) $37x \equiv 25 \pmod{117}$ Отв. 7; б) $143x \equiv 41 \pmod{221}$ – решений нет

в) $113x \equiv 89 \pmod{311}$ Отв. 46; г) $221x \equiv 111 \pmod{360}$ отв. 51.

Занятие 9. Неопределённые уравнения первой степени с двумя неизвестными.

а) $3x + 4y = 13$ б) $81x – 48y = 33$ в) $26x + 34y = 13$

Д/з г) $8x - 13y = 63$ д) $45x - 37y = 25$ е) $39x - 22y = 10$

Отв. $x = 3 + 13t$, $y = 8t - 3$ $x = 17 + 37t$, $y = 20 + 45t$ $x = 22t - 2$, $y = 39t - 4$.

2. Для перевозки зерна имеются мешки, вмещающие в себя 60 кг или 80 кг. Сколько нужно тех и других для перевозки 440 кг?

3. Сколько билетов по 30 и 50 р. можно купить на 1490 р?

4. Ставится водопровод длинной 105 м, имеются трубы 3 м и 4.5 м. Сколько нужно тех и других труб? (12 пар решений).

5. Сколько конвертов по 3 и 4 р. можно купить на 50 р? (4 пары решений).

Занятие 10.. Системы линейных сравнений с одним неизвестным

1. Решить системы сравнений

а) $x \equiv 4 \pmod 5$

$x \equiv 1 \pmod{12}$

$x \equiv 7 \pmod{14}$

б) (д/з) $x \equiv 1 \pmod{25}$

$x \equiv 2 \pmod 4$

$x \equiv 3 \pmod 7$

$x \equiv 4 \pmod 9$

в) $2x \equiv 7 \pmod{13}$

$5x \equiv 8 \pmod{17}$

$3x \equiv 7 \pmod{31}$

$14x \equiv 35 \pmod{19}$

г) (д/з) $4x \equiv 3 \pmod 7$

$5x \equiv 4 \pmod{11}$

$11x \equiv 8 \pmod{13}$

д) $3x \equiv 1 \pmod{10}$

$4x \equiv 3 \pmod 5$

$2x \equiv 7 \pmod 9$

е) $3x \equiv 7 \pmod{10}$

$2x \equiv 5 \pmod{15}$

$7x \equiv 5 \pmod{12}$

ж) $5x \equiv 1 \pmod{12}$

$5x \equiv 2 \pmod 8$

$7x \equiv 3 \pmod{11}$ (д/з)

Занятие 11. Нелинейные диофантовы уравнения

Решить в целых числах уравнения:

а) $y^2 - 2xy - 2x = 6$ б) $2x^2 - 11xy - 12y^2 = 17$

в) $35xy + 5x - 7y = 1$ г) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$

д) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{xy}=1$ е) $xy + 3x - 5y + 3 = 0$

Занятие 12. Показатели и индексы чисел по данному модулю.

1. Путем испытаний найти все показатели, которым принадлежат числа от 2 до m – 1 взаимнопростые с m.

а) m = 5 (m = 7, m = 10, m = 11)

2. Найти число первообразных корней и наименьший из них по модулю

а) 19 б) 23 в) 31 г)43.

3. Составьте таблицы индексов и антииндексов по модулю

а) 29 по основанию 2

б) 23 по основанию 5

4.Найти показатели в сравнениях

а) $5^d \equiv 1 \pmod 7$

б) $5^d \equiv 1 \pmod{11}$

в) $8^d \equiv 1 \pmod{13}$

г) $23^d \equiv 1 \pmod{41}$

Занятие 13.Двучленные сравнения по простому модулю.

1. Найти (путем возможно более простых вычислений) показатель, которому принадлежит

а) 7 по модулю 43

б) 5 по модулю 108

2. Найти все первообразные корни по модулям 17, 289, 578

3. Составить таблицы индексов и антиндексов по модулю 13. С помощью таблицы решить сравнение: $2x^8 \equiv 5 \pmod{13}$, $10x \equiv 7 \pmod{13}$.

4. Пользуясь таблицей индексов, указать число решений сравнения

а) $x^{60} \equiv 79 \pmod{97}$
б) $x^{55} \equiv 17 \pmod{97}$
в) $x^{15} \equiv 46 \pmod{97}$
г) $3x^{12} \equiv 31 \pmod{41}$
д) $7x^7 \equiv 11 \pmod{41}$
е) $5x^{30} \equiv 37 \pmod{41}$

Индексированием решить сравнения

а) $2^x \equiv 7 \pmod{67}$

б) $13^x \equiv 12 \pmod{47}$

в) $16^x \equiv 11 \pmod{53}$

г) $52^x \equiv 38 \pmod{61}$

д) $12^x \equiv 17 \pmod{31}$

е) $20^x \equiv 21 \pmod{40}$

ж) $15x \equiv 31 \pmod{37}$

з) $18x \equiv 4 \pmod{29}$

и) $125x \equiv 7 \pmod{79}$

к) $7x \equiv 6 \pmod{17}$

ЗАНЯТИЕ № 14. Выступление с докладами. Защита рефератов.

ЗАНЯТИЕ № 15. Контрольная работа.

6. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Веселова, Л.В. Алгебра и теория чисел: учебное пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов. – Казань : Казанский научно-исследовательский технологический университет (КНИТУ), 2014. – 107 с. : ил. – Режим доступа. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428287)
2. Алгебраические структуры и их приложения: учебное пособие / Л. В. Зяблицева, С. Ю. Корабельщикова, И. В. Кузнецова, С. А. Тихомиров; – Архангельск: Северный (Арктический) федеральный университет (САФУ), 2015. – 169 с. – Режим доступа: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=436142
3. Смолин, Ю.Н. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие / Ю.Н. Смолин. — 5-е изд., стер.—Москва : ФЛИНТА, 2017. — 464 с. - Текст : электронный. (URL: https://znanium.com/catalog/product/1034573) https://znanium.com/read?id=342728

Дополнительная литература

1. Дадаян А.А. Математика: Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 544 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=397662)
2. Иванова С. А. Линейная алгебра : учебное пособие / С. А. Иванова, В. А. Павский ; Кемеровский государственный университет. – 2-е изд., перераб. и доп. – Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2019. – 125 с. : ил., табл. – Режим доступа:: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573547
3. Линейная алгебра. Линейные операторы. Квадратичные формы. Комплексные числа: Учебное пособие / Рубашкина Е.В. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 38 с. (http://znanium.com/bookread2.php?book=544419

Интернет-ресурсы

– ЭБС ZNANIUM.COM http://znanium.com
– ЭБС «Университетская библиотека онлайн» http://biblioclub.ru
– Электронная библиотека http://lib.mexmat.ru/books/75829 (свободный доступ)
– Электронная библиотека http://www.razym.ru (свободный доступ)

– http://nsportal.ru/sites/default/files/2012/12/10/tvorcheskiy_proekt_po_matematike_na_temu.docx.
http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал