Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра методик математического и информационно-технологического образования

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
25 июня 2021 г.

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Программа учебной дисциплины модуля
«Специальные разделы предметной области»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Экономика

(очная форма обучения)

Составитель: Кузина Н.Г., к.п.н., доцент кафедры методик математического и информационно-технологического образования

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Избранные вопросы элементарной математики» относится к дисциплинам по выбору (ДВ 8) части формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. Дисциплины (модули) модуля «Специальные разделы предметной области» учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Экономика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках школьного курса «Математика» или соответствующих дисциплин среднего профессионального образования, а также ряда дисциплин учебного плана, изученных обучающимися в 1-8 семестрах: Аналитическая геометрия, Конструктивная геометрия, Основания геометрии, Математическая логика и теория алгоритмов

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин и прохождения практик: Система подготовки к ЕГЭ по математике, Производственная (педагогическая) Преподавательская по 1 профилю, Учебная (технологическая).

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины «Избранные вопросы элементарной математики» - систематизировать, обобщить систему знаний по школьному курсу математики, а также пополнить эти знания новыми фактами. Изучение данного курса должно способствовать подготовке квалифицированного учителя математики, владеющего основными методами решения различных типов математических задач, знающего теоретические основы курса школьной математики.

Задачей освоения дисциплины является формирование у студента целостного представления об методах решения математических задач сформировать готовность будущего учителя математики к эффективному преподаванию профильных курсов по предмету.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Избранные вопросы элементарной математики» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-11. Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) и в области образования. ПК-11.2. Умеет самостоятельно и в		ОР-1. Умеет самостоятельно осуществлять сбор и обработку информации, используя современные информационные средства поиска и анализа данных; проводить исследовательскую работу в соответствии с индивидуальным планом;	ОР-2. Владеет практическими навыками осуществления исследований в предметной области; приёмами систематизации знаний в предметной области; навыками использования систематизированного теоретического и практического знания для постановки и решения исследовательских

составе научного коллектива решать конкретные задачи профессиональной деятельности; самостоятельно и под научным руководством осуществлять сбор и обработку информации; способен применять полученные знания для объяснения актуальных проблем и тенденций развития предмета; проводить исследовательскую работу в соответствии с индивидуальным планом. ПК-11.3. Владеет базовыми представлениями о принципах организации и осуществления исследований, практическими навыками осуществления исследований; применяет навыки комплексного поиска, анализа и систематизации информации по изучаемым проблемам с использованием научной и учебной литературы, информационных баз данных. ПК-14. Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями ИПК-14.2. Умеет определять роль		ОР-3. Умеет показывать значимость знаний предметной области в практической деятельности и в научных исследованиях, иллюстрировать примерами наличие междисциплинарных связей, решать некоторые простейшие междисциплинарные задачи, характеризовать применимость знаний предметной области в школьном курсе	задач предметной области. ОР-4. Владеет междисциплинарными методами и подходами к решению научных и практических задач, методами моделирования в междисциплинарных и смежных областях.

полученных знаний для смежных областей и для школьного курса, применять полученные знания в решении прикладных задач. ИПК-14.3. Владеет междисциплинарными методами и подходами к решению научных и практических задач, методами моделирования в междисциплинарных и смежных областях.			

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
9	2	72	12	20	-	40	зачёт
10	2	72	12	20	-	40	зачёт
Итого:	4	144	24	40	-	80	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ п/п	Наименование разделов и тем (с разбивкой на модули)	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа

9 семестр					
1.	Решение уравнений и неравенств с параметрами. Линейные уравнения и неравенства. Квадратичные уравнения и неравенства.	6	-	10	20
2.	Решение уравнений и неравенств с модулем, содержащих параметр.	4	-	6	10
3.	Решение уравнений и неравенств графическим способом	2		4	10
	Итого по 9 семестру	12		20	40
10 семестр					
4.	Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами	2		4	10
5.	Показательные и логарифмические уравнения с параметрами	4		6	10
6.	Тригонометрические уравнения и неравенства с параметрами.	4		4	10
7.	Функции. Свойства функций.	2		4	10
Итого 10 семестр		**12**		**20**	**40**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса (9 семестр)

1. Общие представления о задачах с параметрами. Линейные уравнения с параметром. Квадратные уравнения с параметром. Методы решения квадратных уравнений с параметрами.

2.Решение квадратных уравнений с параметрами по возрастанию степени сложности метода. Примеры решения квадратных уравнений с параметром по определению. Графический метод решения квадратных уравнений с параметрами.

3.Решение задачи аналитическим и графическим методом.

Задачи, связанные с расположением корней квадратного трехчлена.

4.Доказательство неравенств с параметрами. Подборка квадратных уравнений и неравенств с параметрами из ЕГЭ.

Краткое содержание курса (10 семестр)

1. Свойства арифметических корней. Некоторые важные неравенства. Иррациональные неравенства.

2.Показательные уравнения. Типы показательных уравнений и методы их решения. Показательно-степенные уравнения. Логарифмические уравнения. Методы решения логарифмических уравнений, содержащих параметр. Логарифмические неравенства. Показательно-логарифмические неравенства.

3.Решение тригонометрических уравнений с параметрами по возрастанию степени сложности метода. Примеры решения тригонометрических уравнений с параметром по определению. Тригонометрические уравнения и методы их решения. Решение систем тригонометрических уравнений.
4.Способы задания функций. Монотонность функций. Экстремумы функций. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Обратная функция.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Примерный вариант контрольной работы (9 семестр):

1) При каких значениях параметра **а** уравнение
$\frac{(a+4)x^2+6x-1}{x+3}=0$ имеет единственное решение?
2) Решите неравенство: $(a+3)x \geq 2$;

3) При каких значениях параметра **а** уравнение
$(a-1)4^x + (2a-3)6^x = (3a-4)9^x$ имеет единственное решение.

Примерный вариант контрольной работы (10 семестр)

1. Найдите все значения параметра а , при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{5-4x-x^2} = 2a+3$ имеет единственный корень.
2. При каких значениях параметра а уравнение $\sin^2 3x - (a+1\backslash 3)\sin 3x+a\backslash 2=0$ имеет ровно три корня , принадлежащих отрезку $[2\pi\backslash 3,\pi]$?
3. При каких значениях параметра а наибольшее значение функции $y=-x^2+4ax + 5x^2$ на [-3,1]равно 8?

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Кузина Н.Г. Элементарная математика. Учебно – методическое пособие для студентов педагогических вузов.- Ульяновск: УлГПУ, 2017.
2. Стрюкова Г. А. Дидактические материалы по элементарной математике. Ульяновск: УлГПУ, 2017. 62 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Самостоятельная работа ОС-2 Контрольная работа ОС-3 Защита реферата ОС-4 Контрольная работа	ОР-1. Умеет самостоятельно осуществлять сбор и обработку информации, используя современные информационные средства поиска и анализа данных; проводить исследовательскую работу в

		соответствии с индивидуальным планом;
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-5 Зачет в форме устного собеседования по вопросам	ОР-2. Владеет практическими навыками осуществления исследований в предметной области; приёмами систематизации знаний в предметной области; навыками использования систематизированного теоретического и практического знания для постановки и решения исследовательских задач предметной области. ОР-3. Умеет показывать значимость знаний предметной области в практической деятельности и в научных исследованиях, иллюстрировать примерами наличие междисциплинарных связей, решать некоторые простейшие междисциплинарные задачи, характеризовать применимость знаний предметной области в школьном курсе ОР-4. Владеет междисциплинарными методами и подходами к решению научных и практических задач, методами моделирования в междисциплинарных и смежных областях

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине «Избранные вопросы элементарной математики»

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-5 Зачет в форме устного собеседования по вопросам
Перечень вопросов к зачету
Примерный перечень вопросов к зачету 9 семестр.

1. Решение алгебраических уравнений с параметром.
2. Алгоритмы решения простейших линейных и квадратных уравнений с параметрами.

3. Равносильные преобразования уравнений и неравенств, содержащих параметры.
4. Теоремы о равносильных неравенствах.
5. Теоремы о равносильных системах уравнениях.
6. Доказательство неравенств на множествах.

Примерный перечень вопросов к зачету 10 семестр.

1. Решение показательных уравнений и неравенств с параметром.
2. Алгоритмы решения простейших логарифмических уравнений и неравенств с параметрами.
3. Равносильные преобразования уравнений и неравенств, содержащих параметры.
4. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств, содержащих параметр .

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачёт
9,10 семестры	Разбалловка по видам работ	6 х 1=6 баллов	10 х 1=10 баллов	152 балла	32 балла
	Суммарный макс. балл	6 баллов max	16 баллов max	168 балла max	200 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 9 и 10семестров

	Баллы (2 ЗЕ)
«зачтено»	более 100
«не зачтено»	100 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

Практическое занятие 1: Общие методы решения алгебраических уравнений.

Определение: уравнение вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ (1),

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ -действительные числа (коэффициенты), n - натуральное число, а x искомая неизвестная величина, $a_n \neq 0$ называется алгебраическим уравнением n-го порядка.

Обсудим методы решения уравнений при n >2.

В силу теоремы К. Гаусса любое алгебраическое уравнение n –го порядка имеет не более n корней. В математике разработаны способы вычисления корней алгебраических уравнений 3-го и 4-го порядка, однако в школьном курсе математики эти методы не рассматриваются.

Перейдем к основному изложению.

Здесь мы рассмотрим методы, применимые к отдельным представителям любого типа. Это общие методы:

-метод разложения на множители;

-метод замены переменной;

-метод, основанный на использовании строгой монотонности;

-метод сравнения множеств значений.

Метод разложения на множители (ОМ1).

Идея метода выражена следующей цепочкой преобразований данного уравнения:

$f(x)=g(x) \leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \leftrightarrow \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = 0.$

Далее рассматривают либо равносильную совокупность двух систем:

$$1)\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \varphi_2(x) - \text{ имеет смысл} \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} \varphi_2(x) = 0 \\ \varphi_1(x) - \text{ имеет смысл} \end{cases} \quad (2)$$

либо совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \varphi_1(x) = 0 \\ \varphi_2(x) = 0 \end{array}\right.$$

Во втором случае могут быть получены посторонние корни, поэтому здесь обязательна проверка корней или иной их анализ на пригодность.

В случае уравнений (1) правая часть равна 0, причем допустимыми значениями переменной x являются любые действительные числа. Следовательно, остается лишь суметь разложить многочлен

$Pn(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ в произведение многочленов

Qm(x) и Hk(x) меньшей , чем n, степени:

Pn(x) = Qm(x)· Hk(x), то (1) $\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Qm(x) = 0 \\ Hk(x) = 0 \end{array}\right.$ (3)

Способы разложения на множители:

Вынос за скобку некоторого выражения;

Выделение полных квадратов вида : $a^2 \pm 2ab + b^2$;

Выделение разности квадратов;

Выделение полных кубов вида: $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Выделение суммы (разности) кубов.

Этот список легко продолжить, если иметь ввиду алгебраические формулы для $(a \pm b)^n$, $a^n - b^n$, $a^{2k+1} + b^{2k+1}$, $(a + b + c)^k$ и другие при n>3, k>1, n,k ∈N.

Рассмотрим примеры:

Пример 1. $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^4 + x^3 + x^2) - (2x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + x + 1) - 2(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Пример 2. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow [(x^2)^2 - 2x^2 \cdot (2x) + (2x)^2] - 2x^2 + 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow ((x^2 - 2x) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Пример 3. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow [(x^2)^2 - 2x^2 2 + 4] - x^2 = 0 \leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - x^2 = 0 \leftrightarrow (x^2 - 2 - x)(x^2 - 2 + x) = 0 \leftrightarrow x \in \{-2; -1; 1; 2\}$.

Пример 4. $x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3} \leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 3x = 1 \leftrightarrow 4x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \leftrightarrow 4x^3 = (x + 1)^3 \leftrightarrow x\sqrt[3]{4} = x + 1 \leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$.

Пример 5. (5-я Соросовская олимпиада, 9 класс) Решите уравнение:

$$x^4 + 4x^3 - 8x + 4 = 0$$

Решение: в силу формулы $(а+в+с)^2 = а^2+в^2+с^2+2ав+2ас+2вс$, многочлен в левой части является полным квадратом трехчлена x^2+2x-2 . Исходное уравнение равносильно квадратному уравнению: $x^2+2x-2=0$.

Практическое занятие 2. Метод подстановки.

Идея метода по отношению к уравнению f(x)=g(x) состоит в том, чтобы найти функции $t=\varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, для которых при любом x ∈D(f)∩D(g) выполняется равенство f(x) – g(x) = $\varphi_2(\varphi_1(x))$. В этом случае достаточно решить уравнение $\varphi_2(t) = 0$, а затем для каждого корня t0 , если он имеется, решить уравнение $\varphi_1(x)$ = t0. (*)

Совокупность всех полученных таким образом корней x ∈D(f)∩D(g) уравнений (*) будет искомым множеством решений исходного уравнения. Функция $t=\varphi_1(x)$ называется в подобной ситуации подстановкой.

Пример 5. $(x^2 - 7x + 13)^2 - (x - 3)(x - 4) = 1$.

Решение. Пусть $t=x^2 - 7x + 13$. Тогда данное уравнение , в силу (x-3)(x-4)= $x^2 - 7x + 12$, можно записать в виде $t^2 - t = 0$. Отсюда имеем t1=0, t2=1.

Следовательно, осталось решить совокупность из двух квадратных уравнений : $x^2 - 7x + 13 = 0$, $x^2 - 7x + 13 = 1$. Ответ: {3;4}.

Пример 6. (2-я Соросовская олимпиада, 1 тур)

(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5.

Указание: перемножить выражения в 1-й и 4-й, 2-й и 3-й скобках, применить подстановку $t=12x^2 - 5x$. Ответ: $\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{12}\}$.

Метод строгой монотонности (ОМ3).

Он основан на следующей теореме.

Теорема 1. Если y= f(x) строго монотонна на множестве X , то уравнение f(x)=a (с константой a в правой части) не может иметь на множестве X более одного корня.

Действительно, иногда с помощью каких-либо приемов (или подбором) удается найти один корень данного уравнения. Если при этом к данному уравнению применима приведенная выше теорема, то найденный корень единственный. Процесс корней будет закончен.

Чтобы применить теорему 1 необходимо:

знать промежутки монотонности у основных элементарных функций;

уметь находить промежутки монотонности у более сложных функций

(способы нахождения промежутков монотонности: с помощью производных; используя определение строгой монотонности; на основе свойств функций).

Пример 7. $x^6 + 2x^4 + 3x^2 - 54 = 0$

Решение. Очевидно, что функция f(x) =$x^6 + 2x^4 + 3x^2 - 54$ возрастает на множестве [0;∞). Следовательно на этом множестве у исходного не более одного корня. Это x=√3. Теперь достаточно заметить, что функция четная и поэтому уравнению f(x)=0 вместе с каждым x удовлетворяет также и значение -x, или использовать убывание функции f(x) на множестве (-∞;0).

Ответ: ± √3.

Пример: 8. $x^5 + 3x^3 + 5x - 15\sqrt{2} = 0.$

Решение. Заметим, что функции y1=5x-15√2, y2=$3x^3$ и y3=x^5 являются возрастающими на веем R. Следовательно также возрастающей является функция y= y1+ y2+ y3. Тогда, в силу теоремы 1 данное уравнение не может иметь более одного корня. Остается проверить, что ему удовлетворяет значение x = √2.

Практическое занятие 3. Метод сравнения множеств значений (ОМ 4).

В его основе лежит следующая теорема.

Теорема 2. Если для всех x∈ X выполняются неравенства f(x) ≥ a и g(x) ≤ a, то уравнение f(x)=g(x) на множестве X равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases} \quad (4);$$

Пример 9. $x^8 - 7x^4 - 4x^2 + 20 = 0.$

Решение. Данное уравнение равносильно $x^8 - 8x^4 + 16 = -(x^4 - 4x^2 + 4).$

Ясно, что выражение в левой части этого уравнения есть полный квадрат, следовательно оно всегда неотрицательно на множестве R. Аналогично, выражение в правой части не может принимать положительные значения. Т.о. , по теореме 2 это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x^2 - 4)^2 = 0 \\ (x^2 - 2)^2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Ответ: x= $\pm\sqrt{2}$.

Замечание. Если на множестве X выполняется либо $\begin{cases} f(x) > a \\ g(x) \le a \end{cases}$ либо $\begin{cases} f(x) \ge a \\ g(x) < a \end{cases}$, то уравнение f(x)=g(x) на X не имеет корней.

В общей ситуации сила метода ОМ4 проявляется в том, что при переходе от уравнения f(x)=g(x) к системе уравнений (4) выражения f(x) и g(x) быть весьма различными по своему «типу», разъединяются и не мешают друг другу в процессе решения возникшей системы (это особенно характерно в тех случаях, когда уравнение имеет смешанный тип).

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Добрынина, И. В. Элементарная математика : учебно-методическое пособие / И. В. Добрынина, Н. М. Исаева, Н. В. Сорокина. — Тула : ТГПУ, 2018. — 95 с. — ISBN 978-5-6041454-8-7. — Текст : электронный // URL: https://e.lanbook.com/book/113615
2. Буракова, Г. Ю. Элементарная математика : учебное пособие / Г. Ю. Буракова, Т. Н. Карпова, И. Н. Мурина. — Ярославль : , [б. г.]. — Часть 1 — 2012. — 131 с. — ISBN 978-5-87555-752-1. — Текст : электронный — URL: https://e.lanbook.com/book/154018
3. Чулков, П.В. Практические занятия по элементарной математике (2-й курс): учебное пособие / П.В. Чулков. – Москва: Прометей, 2012. – 102 с.: ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437445

Дополнительная литература

1. Дадаян, А. А. Геометрические построения на плоскости и в пространстве: задачи и решения: учебное пособие / А. А. Дадаян. — 2-е изд. – Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2020. - 464 с.: ил. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-807-6. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1082973
2. Елецких, И.А. Математика: учебное пособие / И.А. Елецких, Т.М. Сафронова, Н.В. Черноусова; Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Кафедра математики и методики её преподавания. – Елец: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2016. – Ч. 2. – 144 с.: граф., ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=498148
3. Мельников, Р.А. Элементарная математика: учебное пособие / Р.А. Мельников, Г.Г. Ельчанинова; Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина. – Елец: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2017. – Ч. 3. Тригонометрия. – 101 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=498152
4. Ельчанинова, Г.Г. Элементарная математика: учебное пособие / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников; Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина. – Елец: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2016. – Ч. 4. Геометрия. Начальные сведения. Треугольник. – 93 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=498154

Интернет-ресурсы

1. http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал
2. Федеральный портал Российское образование: http:// www.edu.ru
3. Единое окно доступа к информационным ресурсам http://window.edu.ru/
4. Научная электронная библиотека «Киберленинка»: https://cyberleninka.ru/search
5. Издательский Дом «Первое сентября». Электронный ресурс: открытый урок.рф http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/414629/