

Министерство просвещения Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Ульяновский государственный педагогический университет  
имени И.Н. Ульянова»  
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования  
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебно-методической  
работе  
  
С.Н. Титов  
21 июня 2021

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Программа учебной дисциплины модуля  
«Специальные разделы предметной области»

основной профессиональной образовательной программы высшего  
образования – программы бакалавриата по направлению подготовки  
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы  
Математика. Иностранный язык

(очная форма обучения)

Составитель: Сибиревъ А.Р.,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-  
математического и технологического образования, протокол от  
21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

## **Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» относится к дисциплинам по выбору 8 (ДВ.8) части формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1. Дисциплины (модули) модуля «Специальные разделы предметной области» учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Иностранный язык», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках курса «Математический анализ», «Алгебра», «Геометрия», «Теория чисел и числовые системы».

Результаты изучения дисциплины являются основой для изучения дисциплин и прохождения практик: выполнение и защита выпускной квалификационной работы, подготовка и сдача государственного экзамена.

### **1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине**

Целью освоения дисциплины «Дополнительные главы математического анализа» является обобщении и углублении знаний по курсу математического анализа, формировании представления об их приложениях, о возможностях продолжения образования в области математического анализа, о современных проблемах математического анализа, а также в формировании абстрактно-логического мышления и умения оперировать такими общематематическими понятиями. Существенной частью курса является обучение студентов самостоятельному изучению вопросов, оказывается помочь в работе с литературой, формируются навыки выступления с докладами. В процессе изучения дисциплины будущие учителя знакомятся с различными методами проведения строгих логических доказательств, готовятся к грамотному и логичному изложению материала на уроках математики, а также обучаются решению некоторых задач повышенной сложности школьного курса, олимпиадных задач.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Дополнительные главы математического анализа» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	зnaet	umeet	vlaedeet
ПК-11 Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) и в области образования ПК-11.1. Знает основные научные понятия	OP-1 Знает основные фундаментальные		

<p>особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основы организации исследовательской деятельности; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач.</p>	<p>понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области</p> <p><b>ОР-2</b></p> <p>Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области.</p>		
<p><b>ПК-14.</b> Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями</p> <p><b>ИПК-14.1.</b> Знает роль и возможности применения аппарата предметной области в смежных научных областях, их методологическое и мировоззренческое значение; имеет представление о междисциплинарных связях, научных</p>	<p><b>ОР-3.</b> возможности применения полученных сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях</p>	<p><b>ОР-4.</b> решать задачи школьного курса математики повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине</p>	

методах смежных областей ИПК-14.2. Умеет определять роль полученных знаний для смежных областей и для школьного курса, применять полученные знания в решении прикладных задач.			
---	--	--	--

**2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации	
	Всего		Лекции, час	Практические занятия,	Лабораторные занятия, час	Самостоятельная работа, час		
	Трудоемк.	Зач. ед.						
9	2	72	12	20	-	40	зачёт	
10	2	72	12	20	-	40	зачёт	
Итого:	4	144	24	40	-	80	зачёт	

**3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

№ п/п	Наименование разделов и тем (с разбивкой на модули)	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа
9 семестр					
1.	Предел и непрерывность (обобщения этих понятий). Линейные функционалы и операторы, предел и непрерывность линейных операторов в метрических	12	-	20	40

	пространствах, гильбертовых пространствах, топологических пространствах				
	<b>Итого</b>	<b>12</b>	-	<b>20</b>	<b>40</b>
10 семестр					
1.	Мера, измеримые функции, интегралы Лебега и Стильеса.	4 4		4 8	10 15
2.	Элементы дифференциального исчисления в линейных пространствах.	4		8	15
3.	Экстремальные задачи.				
	<b>Итого</b>	<b>12</b>	-	<b>20</b>	<b>40</b>
	<b>Всего</b>	<b>24</b>	-	<b>4</b>	<b>200</b>

### 3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

#### Краткое содержание курса

**Предел и непрерывность.** Предел функции действительной переменной. Предел по базе. Качественные задачи и контрпримеры. Предел функций нескольких переменных. Предел функции комплексной переменной. Непрерывность, равномерная непрерывность. Качественные задачи и контрпримеры. Линейные функционалы и операторы, предел и непрерывность линейных операторов в метрических пространствах, гильбертовых пространствах, топологических пространствах

**Мера, измеримые функции, интегралы Лебега и Стильеса.** Множества, измеримые по Лебегу на прямой, на плоскости. Свойства меры Лебега. Множества нулевой меры Лебега. Понятие измеримой числовой функции. Свойства измеримых функций. Понятие интеграла Лебега от измеримой ограниченной функции. Существование интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Интеграл Лебега от неограниченной функции. Суммируемые функции. Пространства  $L_1[a;b]$  и  $L_2[a;b]$ . Функции пространств, как функционалы. Пространства функций, суммируемых с мерой.

**Интеграл Стильеса.** Общее понятие меры, интеграл (Римана) как мера. Дискретные меры и неубывающие ступенчатые функции. Определение интеграла Римана-Стильеса по мере, порожденной неубывающей функцией. Понятие функции с ограниченной вариацией, интеграл Римана-Стильеса по мере, порожденной функцией ограниченной вариации; представление функции ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих функций. Мера Лебега на числовой прямой, интеграл Лебега (повторение). Понятие об интеграле Лебега-Стильеса.

**Дифференцирование операторов.** Нелинейные операторы в нормированных пространствах: Дифференцирование по Фреше и дифференцирование по Гато. Примеры дифференцирования функционалов. дифференцирование по Фреше и дифференцирование по Гато функций действительной переменной, функций нескольких переменных, функции комплексной переменной, функционалов, операторов.

**Экстремумы функционалов.** Экстремумы функции действительной переменной, функций нескольких переменных, функции комплексной переменной, функционалов. Теорема Ферма как необходимое условие экстремума функционала. Постановка простейшей задачи классического вариационного исчисления, слабые и сильные экстремумы. Уравнение Эйлера. Экстремали. \*Задачи на экстремум функционала, зависящего от старших производных. \*Задачи со свободными концами. \*Проблема достаточных условий экстремума в задачах вариационного исчисления.

Задачи на условный экстремум функционалов. Условный экстремум функционала в нормированном пространстве. Теорема о неявной функции в нормированном пространстве;

производные по подпространствам. Случай неявно заданной функции одной переменной, условный экстремум функции двух переменных при одном условии связи (повторение, геометрический смысл). Изопериметрические задачи классического вариационного исчисления.

**Интерактивные формы занятий:** математический турнир «Задачи оптимизации».

#### **4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляющую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения самостоятельных и контрольных работ по дисциплине.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным выступлениям по материалам лекций, самостоятельных докладов, презентаций;
- подготовки тестов по вопросам программы
- домашних заданий для самостоятельного решения

#### **ОС-1 Структура контрольной работы по дисциплине**

1. Выяснить, является ли данный функционал или оператор линейным; непрерывным; ограниченным; ограниченным снизу; инъективным; сюръективным; открытым; замкнутым на указанном пространстве. Найти или оценить норму оператора, если он ограничен (15 баллов).

1.1.

1.2.

1.3.

2. Построить оператор, сопряженный к данному оператору. Сопоставить свойства оператора и его сопряженного (10 баллов).
  - 2.1.
  - 2.2.
3. Найти спектр оператора, указать дискретный, непрерывный и остаточный спектр (15 баллов).
  - 3.1.
  - 3.2.
  - 3.3.

## **ОС-2. Кейс-задачи для самостоятельного решения**

Исследовать на экстремум функционалы:

## **ОС-3 .Вопросы для самостоятельного изучения обучающимися (темы мини-выступлений и рефератов)**

1. Аксиоматическая теория множеств: аксиоматика Цермело-Френкеля.
2. Аксиоматическая теория множеств: аксиоматика фон Неймана.
3. Аксиома выбора и её роль в математике.
4. Парадоксы теории множеств и их разрешение в аксиоматической теории.
5. История проблемы континуума.
6. От Кантора до Гёделя: проблемы оснований математики.
7. Основные топологические структуры.
8. Основы геометрии гильбертовых пространств.
9. Метрические пространства и кластерный анализ.
10. Метрические пространства и теория передачи сигналов.
11. Различные способы введения интеграла Лебега.
12. Предельный переход под знаком интеграла.
13. Интегрирование и дифференцирование.
14. Непрерывность и абсолютная непрерывность функций.
15. Пространства суммируемых функций и их свойства.

### **Перечень учебно-методических изданий кафедры по вопросам организации самостоятельной работы обучающихся**

1. Сибирева А.Р. Вариационные проблемы и методы: методические указания. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. –32 с.
  2. Сибирева А.Р. Задачи оптимизации и их математические модели: методические указания.– Ульяновск: УлГПУ, 2017. –32 с.
  3. Глухова Н.В. Линейные операторы: учебно-методическое пособие для подготовки магистров и бакалавров направления подготовки «Педагогическое образование» физико-математического профиля – Ульяновск. УлГПУ им. И.Н. Ульянова. 2017 – 35 с.
- 5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

### **Организация и проведение аттестации студента**

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и

личностных качеств, которые позволяют выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

**Цель проведения аттестации** – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

**Промежуточная аттестация** осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ, используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	<b>Оценочные средства для текущей аттестации</b> ОС-1 Контрольная работа ОС-2 Контрольная работа ОС-3. Выступление с рефератами	ОР-1. Знает основные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области. ОР-3. Знает возможности применения полученных сведений к решению задач школьного курса математики, а также в смежных научных областях ОР-4. Умеет решать задачи школьного курса математики повышенной сложности, решать и составлять прикладные задачи по дисциплине
	<b>Оценочные средства для промежуточной аттестации зачет (экзамен)</b> ОС-4 Зачет в форме устного собеседования по вопросам ОС-5 Зачет в форме устного собеседования по вопросам	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а также процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине «Избранные вопросы алгебры и теории чисел».

*Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости  
обучающихся по дисциплине*

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

***Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости  
обучающихся по дисциплине***

**ОС-4. Зачет (9 семестр)**

1. Предел функции действительной переменной. Предел по базе.
2. Предел функций нескольких переменных. Предел функции комплексной переменной.
3. Непрерывность, равномерная непрерывность.
4. Линейные функционалы и операторы.
5. Предел и непрерывность линейных операторов в метрических пространствах.
6. Предел и непрерывность линейных операторов в гильбертовых пространствах.
7. Предел и непрерывность линейных операторов в топологических пространствах.

**ОС-5 Зачет (10 семестр)**

1. Множества, измеримые по Лебегу на прямой, на плоскости.
2. Свойства меры Лебега. Множества нулевой меры Лебега.
3. Понятие измеримой числовой функции. Свойства измеримых функций.
4. Понятие интеграла Лебега от измеримой ограниченной функции.
5. Существование интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега.
6. Сравнение интегралов Римана и Лебега.
7. Интеграл Лебега от неограниченной функции.
8. Пространства  $L_1[a;b]$  и  $L_2[a;b]$ . Функции пространств, как функционалы. Пространства функций, суммируемых с мерой.
9. Общее понятие меры, интеграл (Римана) как мера. Дискретные меры и неубывающие ступенчатые функции.
10. Определение интеграла Римана-Стильеса по мере, порожденной неубывающей функцией.
11. Понятие функции с ограниченной вариацией, интеграл Римана-Стильеса по мере, порожденной функцией ограниченной вариации; представление функции ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих функций.
12. Мера Лебега на числовой прямой, интеграл Лебега (повторение). Понятие об интеграле Лебега-Стильеса.
1. Дифференцирование по Фреше и дифференцирование по Гато. Примеры дифференцирования функционалов.
2. Дифференцирование по Фреше и дифференцирование по Гато функции действительной переменной, функций нескольких переменных, функции комплексной переменной, функционалов, операторов.
3. Экстремумы функции действительной переменной, функций нескольких переменных, функции комплексной переменной, функционалов.
4. Теорема Ферма как необходимое условие экстремума функционала. Постановка простейшей задачи классического вариационного исчисления, слабые и сильные экстремумы.
5. Уравнение Эйлера. Экстремали.
6. Задачи на условный экстремум функционалов. Изопериметрические задачи классического вариационного исчисления.

**Примерные задачи к зачету.**

1. Найти интеграл Лебега от неограниченной функции или доказать, что она не суммируема на отрезке  $[a;b]$ . Вычислить также несобственный интеграл (Римана) от этой функции, если он существует.

;

2. Принадлежат ли указанные функции (или порожденные ими классы эквивалентных функций) пространствам , , , , ?  
(функция Дирихле);

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

### **Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине**

*Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся*

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Зачёт
<b>9, 10 семестры</b>	Разбалловка по видам работ	6 x 1=6 баллов	10 x 1=10 баллов	152 балла	32 балла
	Суммарный макс. балл	6 баллов max	16 баллов max	168 балла max	200 баллов max

*Критерии оценивания работы обучающегося*

	<b>Баллы (2 ЗЕ)</b>
«зачтено»	более 100
«не зачтено»	100 и менее

### **6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись лекции – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

#### **Подготовка к практическим занятиям.**

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на

выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

## **7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины**

### **Основная литература**

1. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник : / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – 7-е изд. – Москва : Физматлит, 2012. – 573 с. – ISBN 978-5-9221-0266-7. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563>
2. Треногин, В.А. Функциональный анализ : учебник / В.А. Треногин. – 3-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2002. – 488 с. – ISBN 5-9221-0272-9. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82613>

### **Дополнительная литература**

1. Золотарев М. Л., Федоров И. А. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве: учебное пособие. – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2014. – 116 с.  
URL: [https://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_view\\_red&book\\_id=278960](https://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=278960)
2. Ильин В. А. , Позняк Э. Г. Основы математического анализа: учебник, Ч. 2 . – М.: Физматлит, 2009. –464 с.  
[https://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_view\\_red&book\\_id=83225](https://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=83225)
3. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебное пособие / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Физматлит, 2005. – 240 с. – ISBN 5-9221-0271-0  
URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82612>