Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Программа учебной дисциплины Предметно-методического модуля

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Экономика

(очная форма обучения)

Составитель: Череватенко О.И., к.ф-м.н., доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дискретная математика с элементами сетевого планирования» относится к дисциплинам обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) Предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Экономика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках курса «Алгебра и теория чисел», «Математическая логика и теория алгоритмов», «Основы математической обработки информации», «Прикладные вопросы линейной алгебры в экономике», школьного курса математики.

Результаты изучения дисциплины являются теоретической и методологической основой для изучения спецкурсов по математике и экономике, для прохождения практик и итоговой аттестации.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения данной дисциплины является формирование представлений об основных объектах, моделях и методах теории графов, развитие абстрактно-логического мышления.

Задачей освоения дисциплины является овладение студентами методами построений и анализа графовых моделей и применение их в будущей профессиональной деятельности.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Проективная геометрия» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-11 Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) и в области образования ПК-11.1. Знает основные научные понятия и особенности их	ОР-1 Знает основные фундаментальные		

использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основы организации исследовательской деятельности; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач.	понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области.		
ПК-13. Способен соотносить основные этапы развития предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) с ее актуальными задачами, методами и концептуальными подходами, тенденциями и перспективами ее современного развития. ПК-13.1. Знает основные этапы исторического развития предметной области.	ОР-3 Знает основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов		

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
8	3	108	18	30		33	экзамен
Итого:	3	108	18	30	-	33	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
8 семестр				
Основные понятия теории графов	4	8		9
Метрические характеристики графа	4	6		8
Деревья	4	6		8
Элементы сетевого планирования	6	10		8
Итого по 4 семестру	**18**	**30**	**-**	**33**

Всего по дисциплине:	**18**	**30**	**-**	**33**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса(8 семестр)

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

История становления и развития теории графов. Определение графа. Графическая интерпретация графа. Мультиграфы и псевдографы. Полный граф, регулярный граф, двудольный граф. Смежность и инцидентность. Способы задания графов. Степень вершины. Теорема о сумме степеней вершин графа и её следствие. Подграфы и части графа. Операции над графами. Маршруты, цепи и циклы в неориентированном графе. Пути, контуры в орграфе. Свойства маршрутов. Выявление маршрутов и путей с заданным количеством ребер. Связность в графах. Связность неориентированных и ориентированных графов. Компоненты связности. Шарниры, блоки и мосты. Матрицы связности, матрицы достижимости и контрдостижимости.Понятие изоморфных графов. Отношение изоморфизма, заданное на множестве графов. Свойства изоморфных графов. Теоремы об изоморфных графах. Геометрическая интерпретация изоморфных графов.

II. МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАФА

Длина маршрута. Расстояние между вершинами графа. Матрица расстояний. Эксцентриситет вершины. Радиус и диаметр графа. Центральные и периферийные вершины графа. Центр графа. Эйлеровы и полуэйлеровы графы. Критерии эйлеровости и полуэйлеровости графов. Алгоритм Флѐри. Гамильтоновы и полугамильтоновы графы. Достаточные условия гамильтоновости графа. Задача коммивояжера.

III. ДЕРЕВЬЯ

Определения и свойства неориентированных деревьев. Лес. Вершина максимального типа дерева. Алгоритм нахождения центра неориентированного дерева. Кодирование деревьев. Код Прюфера. Ориентированные и корневые деревья. Бинарные деревья. Остовное дерево графа. Теорема Кэли. Независимые и покрывающие множества. Клики. Теорема о числах независимости и покрытий. Максимальные независимые множества вершин, их поиск. Кратчайшее вершинное покрытие, алгоритмы его поиска. Доминирующие множества. Паросочетание. Совершенное паросочетание. Задача о свадьбах, теорема Холла. Задача о назначениях и алгоритм ее решения. Транспортная задача и алгоритм ее решения.

IV. ЭЛЕМЕНТЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Сущность и назначение сетевого планирования и управления. Модели сетевого планирования и управления, задача линейного программирования. Сетевой график. Задача поиска максимальных путей в графе. Понятия раннего срока и позднего срока. Критический путь. Виды резерва: полный резерв, свободный резерв, независимый резерв. Потоки в сетях. Понятие потока, величина потока. Закон Кирхгофа. Увеличивающаяся цепь.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным выступлениям по материалам лекций, самостоятельных докладов, презентаций;
- подготовки тестов по вопросам программы
- домашних заданий для самостоятельного решения

ОС-1. *Темы рефератов*

1. Число различных графов с вершинами.
2. Покрытия и упаковки в теории графов.
3. Задача о свадьбах, теорема Холла.
4. Задача о назначениях и алгоритм ее решения.
5. Транспортная задача и алгоритм ее решения
6. Производящие функции в теории графов.
7. Методы линейной алгебры в теории графов.
8. Применение теории графов в программировании.
9. ….

ОС-2. Самостоятельная работа

Задача. Граф задан списком ребер.

Считая данный граф неориентированным, обозначить его вершины и рёбра разными символами и определить.

1. Вид графа.
2. Степени каждой вершины
3. Построить матрицы инцидентности и смежности
4. Рассмотреть части графа. Показать подграф, состоящий из трёх вершин. Сколько таких подграфов можно найти в данном графе? Показать примеры пересечения и объединения частей графа
5. Привести примеры циклического маршрута, цепи, простой цепи.
6. Определить центр, диаметр и радиус графа.

Считая граф ориентированным, определить

1. Степени вершин
2. Матрицы инцидентности и смежности.
3. Привести примеры пути, ориентированной цепи, простой цепи, контура, цикла и простого цикла.

ОС-3. Контрольная работа

1. Неориентированный граф задан списком ребер f = (1,2,1,2,3,3,4) g = (2,1,3,4,4,2,4) . Определить вид графа. Вычислить степень вершины 4. Найти матрицу смежности графа.
2. Ориентированный граф задан списком ребер f = (1,3,3,2,1,3,2) g = (1,2,2,4,4,4,2). Вычислить степени входа и выхода вершины 2. Найти матрицу инцидентности графа.
2. Неориентированный графа задан матрицей смежности А. Найти число компонент связности графа. Определить мосты и шарниры (если они есть).

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Найти радиус и диаметр графа задачи 3, центр и периферийные вершины 5. Является ли неориентированный граф, заданный списком ребер, деревом? Если да, то определить вершины максимального типа. Выбрав в качестве корня вершину максимального типа, определить высоту дерева. Найти код Прюфера.

f= (1,2,3,4,7,7,7,8,8,10,11,10)
g = (4,3,4,7,5,6,8,9,10,11,12,13)

6. Задать дерево списком ребер, если его код Прюфера имеет вид (1,1,1,2,2,7,7,7,6,11).
7. Найти хроматическое число графа.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Куренева Т.Н. Элементы теории графов. Учебно – методическое пособие для студентов педагогических вузов.- Ульяновск: УлГПУ, 2011.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но

на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Защита реферата ОС-2 Самостоятельная работа ОС-3 Контрольная работа	ОР-1 Знает основные фундаментальные понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области. ОР-3 Знает основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-4 экзамен в форме устного собеседования	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Перечень вопросов к экзамену (8 семестр)

1. Основные понятия теории графов. Способы задания графов.
2. Степень вершины графа. Теорема о сумме степеней вершин графа.
3. Подграф. Операции над графами.
4. Маршрут, цепь, простая цепь, цикл, простой цикл. Связные графы. Матрица связности. Компоненты связности графа, их число.
5. Мосты и шарниры. Блоки.
6. Сильно связный орграф. Матрицы достижимости и контрдостижимости орграфа.
7. Понятие изоморфных графов. Отношение изоморфизма, заданное на множестве графов. Свойства изоморфных графов. Теоремы об изоморфных графах. Геометрическая интерпретация изоморфных графов.
8. Метрические характеристики графа.
9. Эйлеровы и полуэйлеровы графы. Критерий эйлеровости графа. Алгоритм Флери. Критерий полуэйлеровости графа. Эйлеровы и полуэйлеровы орграфы.
10. Гамильтоновы и полугамильтоновы графы. Достаточные условия гамильтоновости графа. Гамильтоновы и полугамильтоновы орграфы.
11. Определения и свойства неориентированных деревьев. Лес. Вершина максимального типа дерева. Алгоритм нахождения центра неориентированного дерева.
12. Кодирование деревьев. Код Прюфера.
13. Ориентированные и корневые деревья. Бинарные деревья. Остовное дерево графа. Теорема Кэли.
14. Независимые и покрывающие множества. Клики. Теорема о числах независимости и покрытий. Максимальные независимые множества вершин, их поиск. Кратчайшее вершинное покрытие, алгоритмы его поиска. Доминирующие множества.
15. Паросочетание. Совершенное паросочетание. Задача о свадьбах, теорема Холла. Задача о назначениях и алгоритм ее решения.
16. Транспортная задача и алгоритм ее решения.
17. Укладка графа. Планарные графы. Плоские графы. Теорема Эйлера и следствия из нее.
18. Непланарность графов в К5 и К3,3.
19. Критерии планарности графов.
20. Задача коммивояжера. Алгоритм с возвратами отыскания гамильтоновых циклов в графе. Построение сопутствующего дерева.
21. Задачи упорядочения. Минимизация штрафных санкций за задержку обслуживания. Диаграммы Ганта.
22. Задача одного станка (задача «директора»). Алгоритм ее решения.
23. Задача двух станков. Алгоритм Джонсона.
24. Суть метода сетевого планирования и управления проектами.
25. Основные понятия сетевого метода: работа, событие, сетевой график.
26. Определение ранга работ. Упорядочение списка работ.
27. Диаграммы Ганта последовательности работ.

28. Виды сетевых графиков: логические («работы – связи») и структурные («события – работы»). Их преимущества и недостатки.
29. Основные требования к построению структурных сетевых графиков.
30. Причины введения фиктивных работ.
31. Этапы построения структурного сетевого графика для большого числа работ.
32. Способы проверки правильности построения сетевого графика.
33. Определение рангов событий. Правильная нумерация событий.
34. Способы описания сетевых графиков.
35. . Определение количества путей, связанных с некоторым событием.
36. Алгоритм постепенного построения сетевого графика.
37. Правила сокращения числа фиктивных работ.
38. Семейство моделей сетевого графика.
39. Расчет временных характеристик событий: ранние и поздние сроки наступления, резерв времени.
40. Критический путь и его отыскание. Особенности критического пути.
41. Резервы времени работ, их смысл и способы отыскания.
42. Ранние и поздние сроки начала и окончания работ.
43. Некритические дуги, резервы времени и коэффициенты напряженности некритических дуг.
44. Оптимизация стоимости проекта путем сокращения продолжительности работ на критических путях (методом «стоимость – время»).
45. Отыскание варианта выполнения работ, обеспечивающего минимальную стоимость проекта при условии минимально возможного времени его завершения.
46. Сведение задач оптимизации на сетевых графиках к задачам линейного программирования. Три типа таких задач.
47. Оптимизация сетевых моделей по критерию «минимум исполнителей» (оптимизация распределения ресурсов).
48. Транспортные сети и их особенности. Пропускная способность дуги. Условие сохранения потока. Поток в сети. Величина потока. Разрез сети.
49. Теорема Форда – Фалкерсона о максимальном потоке.
50. Алгоритм Форда – Фалкерсона отыскания максимального потока в транспортной сети.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
8 семестр	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	9 баллов max	24 балла max	236 баллов max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 4 семестра

Оценка	Баллы (3 ЗЕ)
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий (8 семестр)

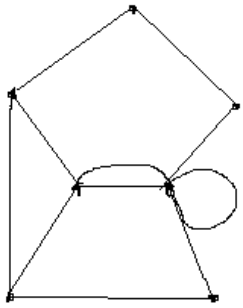
Занятие 1. *Основные понятия теории графов. Способы задания графов.*

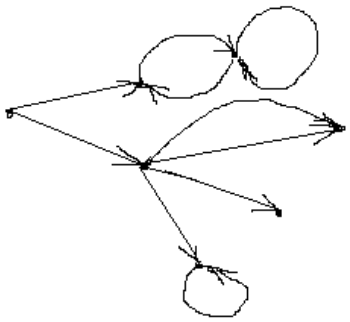
Вопросы к занятию:

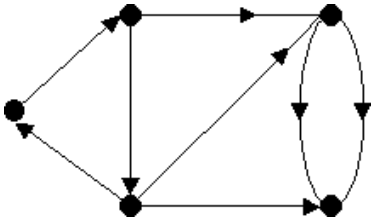
1. Граф. Вершины и ребра графа, отношение инцидентности между ними.
2. Неориентированное ребро, ориентированное ребро, кратные ребра. Смежные ребра, смежные вершины.
3. Основные виды графов.
4. Способы задания графов.
5. Степень вершины графа. Теорема о сумме степеней вершин графа.

Задачи:

1. Определить вид графов. Занумеровать вершины графов. Задать графы различными способами. Определить степени всех вершин.







2. По матрице смежности вершин графов найти матрицу инцидентности, построить изображения графов.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Найти матрицы смежности и инцидентности графа (неориентированного и ориентированного), заданного списком ребер.

1) f = (1,2,1,2,3,3,4)
g =(2,1,3,4,4,2,4) .

2) f = (1,3,2,2,1,3,2)
g= (1,2,3,4,4,4,2).

4. Выяснить, существуют ли графы с данным набором степеней вершин.

1) (0,2,2,3,3); 2) (2,2,2,3,3);
3) (2,2,3,3,3); 4) (0,1,2,3,4).

Занятие 2. *Применение графов к решению задач элементарной математики.*

Вопросы к занятию:

1. Геометрическая интерпретация графа.
2. Способы построения графовой модели задачи.

Задачи:

1. В сарае 10 корыт с едой и 20 поросят. Через некоторое время поросята перебегают от одного корыта к другому. Известно, что от каждого корыта к каждому пробегал какой-нибудь поросенок. Докажите, что хоть один поросенок перебегал не менее трех раз.
2. Между 7 планетами звездной системы установлено ракетное сообщение. Министр рапортовал, что с каждой планеты существует прямой рейс ровно на 5 других планет системы. Докажите, что министр ошибся.
3. Дворовый хулиган Петя хочет отобрать у пятиклассника Леши МП3-плеер, но согласен и не отбирать, если Леша решит за него задачу. Задачу задали на дом, обещая поставить 3 за четверть по геометрии. Задача очень трудная - найти, сколько диагоналей в 17-угольнике. Помогите Леше.
4. Маша сказала своей подружке Лене: «У нас в классе двадцать пять человек. И представь, каждый из них дружит ровно с семью одноклассниками». «Не может этого быть» - ответила Лена. Почему она так решила?

2. Девять шахматистов проводят турнир в один круг (каждый из участников должен сыграть с каждым из остальных по одному разу). Докажите, что в любой момент найдутся двое, закончившие одинаковое число партий.

3. Девять человек проводят шахматный турнир в один круг. К некоторому моменту выясняется, что в точности двое сыграли одинаковое число партий. Докажите, что тогда либо в точности один участник еще не сыграл ни одной партии, либо в точности один сыграл все партии.

Занятие 3. *Связные неориентированные графы.*

Вопросы к занятию:

1. Маршруты, цепи и циклы в неориентированном графе.
2. Свойства маршрутов.
3. Выявление маршрутов с заданным количеством ребер.
4. Связные вершины.
5. Отношение связности, заданное на множестве вершин.
6. Компоненты связности.
7. Шарниры, блоки и мосты.
8. Матрица связности графа.

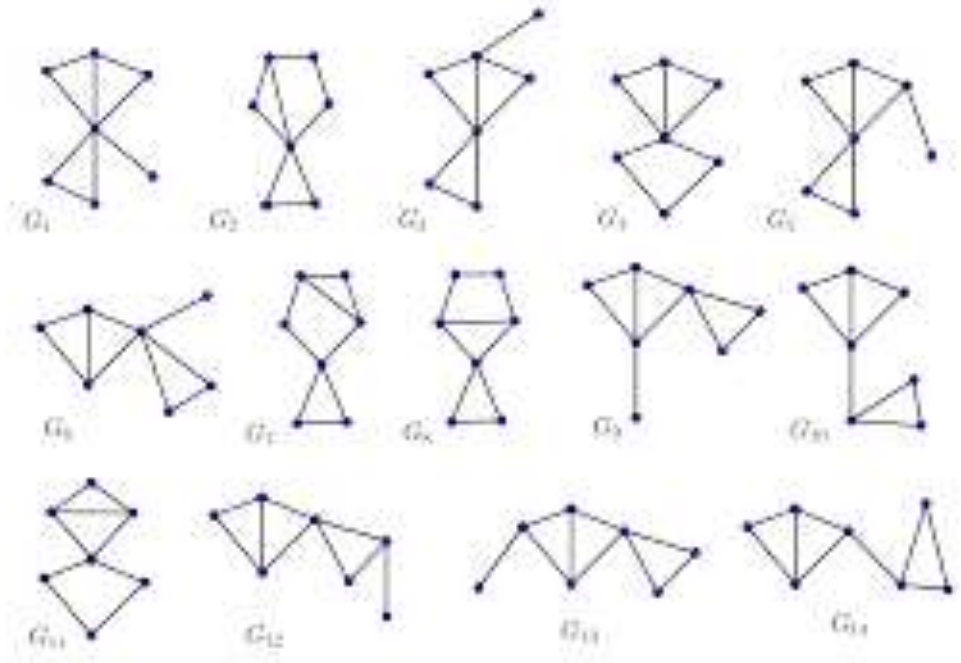
Задачи

1. Определить, какие из графов являются связными. Найти все простые циклы и циклы, не являющиеся простыми.

2. Используя матрицу смежности графа, найти все маршруты:
   а) длины 2; б) длины 3 для графов задачи 1.

3. Доказать, что для любого графа либо он сам, либо его дополнение является связным.

1. Доказать, что если число ребер графа порядка $n>2$ больше, чем $(n-1)(n-2)/2$, то граф связен.
2. Определить мосты и шарниры графов



Занятие 4. *Изоморфные графы.*

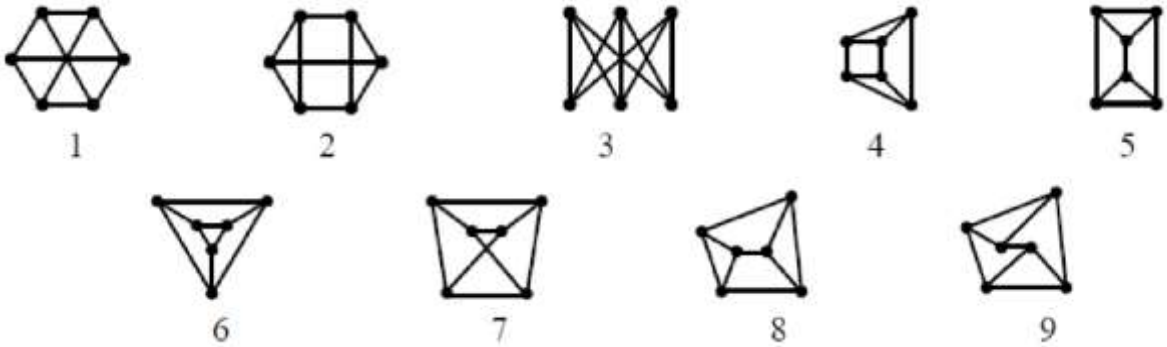
Вопросы к занятию:

1. Изоморфные графы.

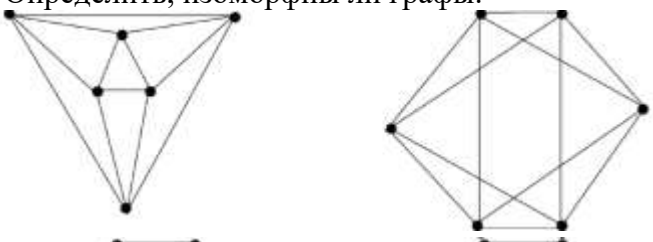
2. Равные графы.
3. Отношение изоморфизма, заданное на множестве графов.
4. Абстрактный граф.
5. Свойства изоморфных графов.
6. Теоремы об изоморфных графах.

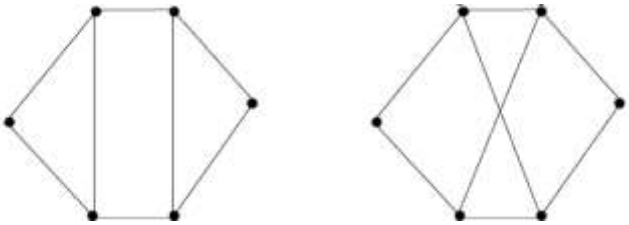
Задачи:

1. Доказать, что изоморфизм сохраняет степени вершин графа. Иначе говоря, степень образа вершины при изоморфизме совпадает со степенью самой вершины.
2. Среди приведенных на рисунке графов найти все пары изоморфных графов.



3. Определить, изоморфны ли графы.

1) 

2) 

4. Найдите все абстрактные графы с 4 вершинами.

5. 6. Найдите все абстрактные графы с набором степеней а) (2,2,2,3,3,4); б) (2,2,2,3,3,3).

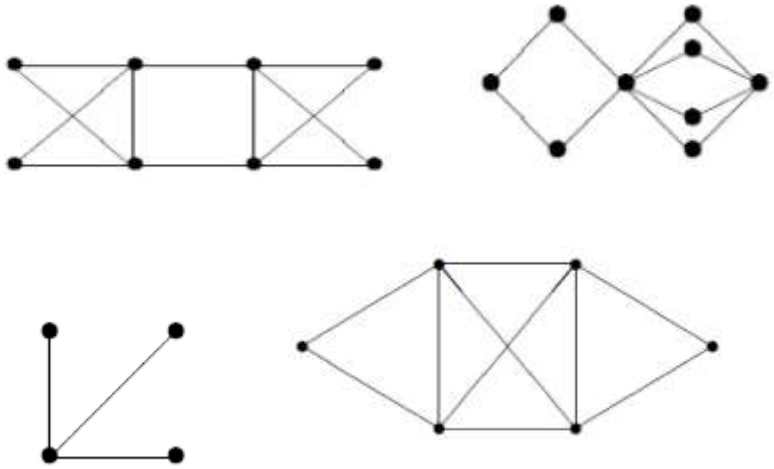
Занятие 5. *Метрические характеристики графа.*

Вопросы к занятию:

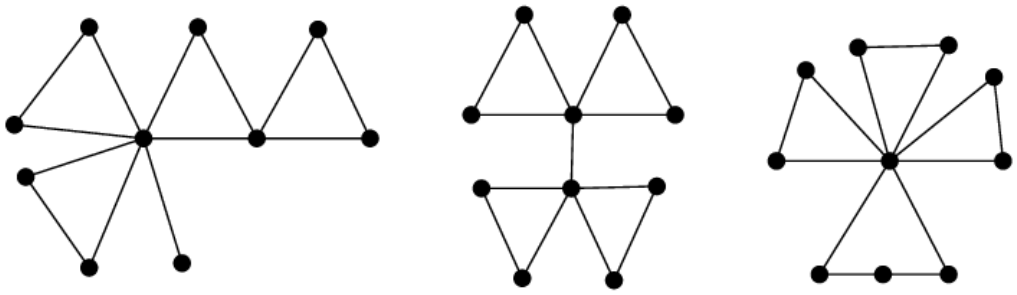
1. Длина маршрута.
2. Расстояние между вершинами.
3. Матрица расстояний.
4. Эксцентриситет вершины.
5. Радиус и диаметр графа.
6. Центральные и периферийные вершины. Центр графа.

Задачи.

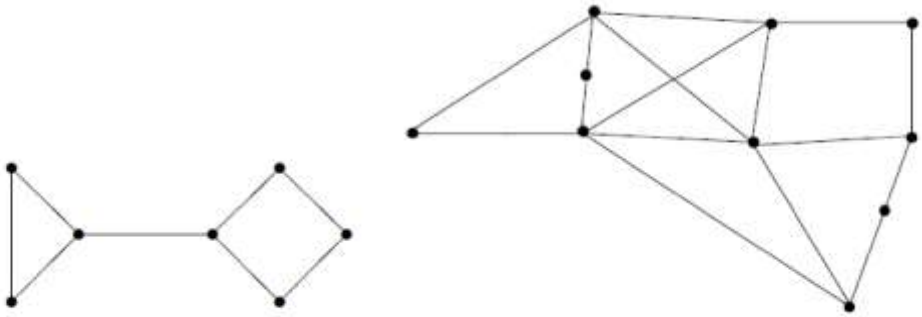
1. Найти эксцентриситеты вершин, радиусы и диаметры графов, периферийные, центральные вершины.



at least one end vertex of degree 2.



(b) $3r-1$ (c) $3r$ (d) $3r+1$

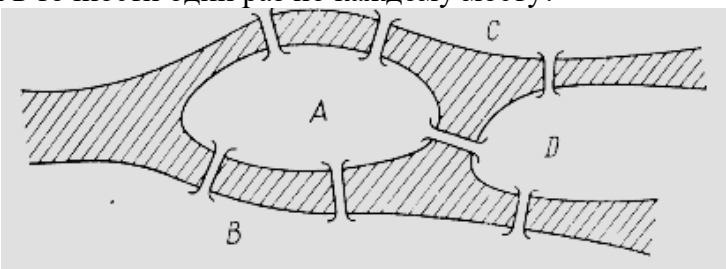


2. Построить граф, центр которого:
1) состоит ровно из одной вершины; 2) состоит ровно из трех вершин и не совпадает с множеством вершин; 3) совпадает с множеством всех вершин.
3. Доказать, что диаметр графа не превосходит его удвоенного радиуса.

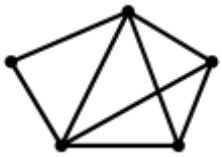
Занятие 6. *Эйлеровы и полуэйлеровы графы*
Вопросы к занятию:
1. Эйлеров цикл.
2. Эйлеров граф.
3. Критерии эйлеровости графов.
4. Эйлерова цепь.
5. Полуэйлеров граф.
6. Критерии полуэйлеровости графов.
7. Алгоритм Флери.

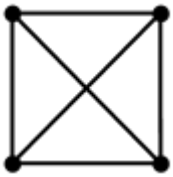
Задачи:

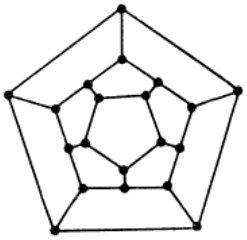
1. Семь мостов города Кёнигсберга (ныне Калининград) были расположены на реке Прегель так, как изображено на рисунке. Можно ли, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя в точности один раз по каждому мосту?

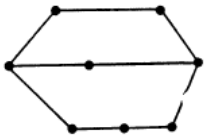


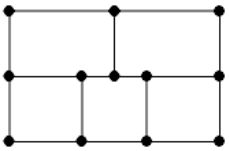
1. Определить, являются ли н-графы эйлеровыми, полуэйлеровыми? Если да, то найти эйлеров цикл, эйлерову цепь.

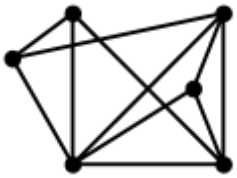


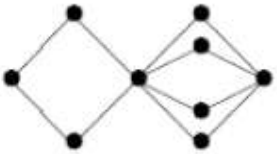


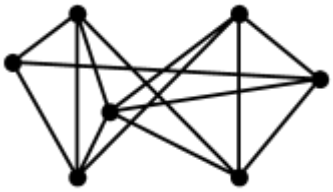


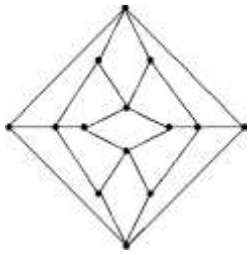


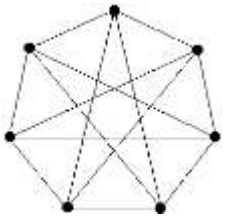






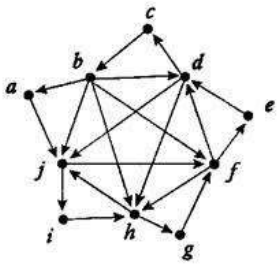




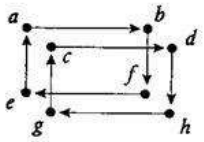


2. Определить, являются ли орграфы эйлеровыми, полуэйлеровыми? Если да, то найти эйлеров цикл, эйлерову цепь.

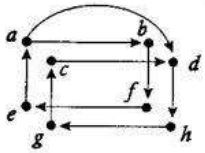
а)



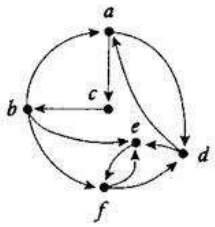
б)

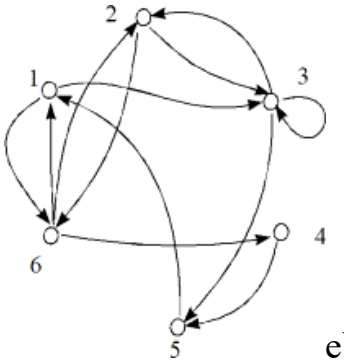


в)



г)





д) е)

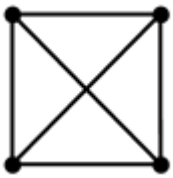
Занятие 7 *Гамильтоновы и полугамильтоновы графы.*

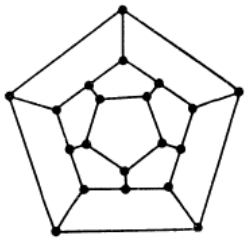
Вопросы к занятию:

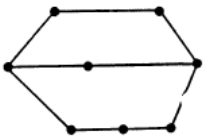
1. Гамильтонов цикл.
2. Гамильтонов граф.
3. Достаточные условия гамильтоновости графа.
4. Гамильтонова цепь.
5. Полугамильтонов граф.

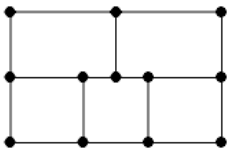
Задачи:

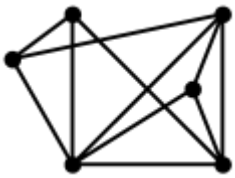
1. Определить, являются ли н-графы гамильтоновыми, полугамильтоновыми?

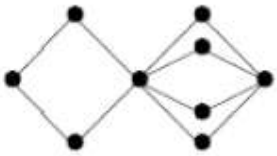


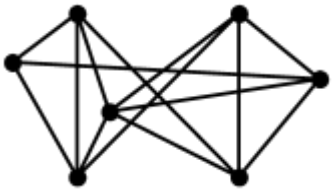


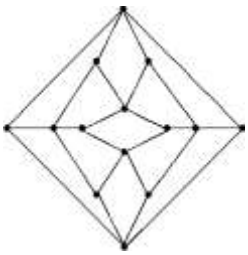


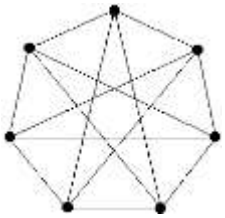




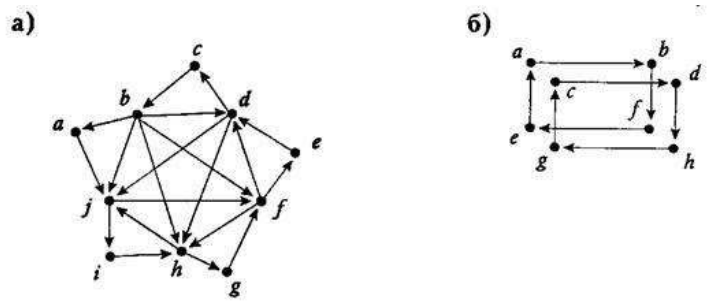


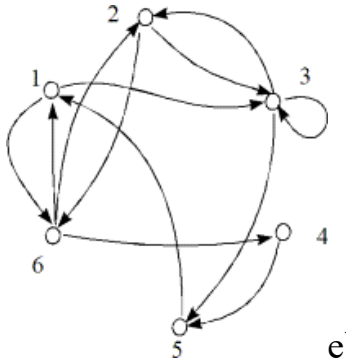




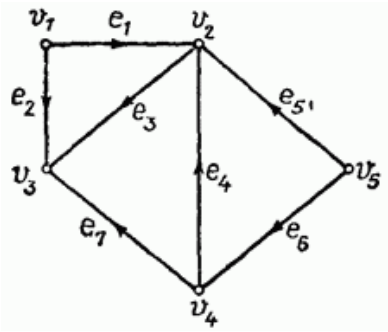


2. Определить, являются ли орграфы гамильтоновыми, полугамильтоновыми?





д)



е)

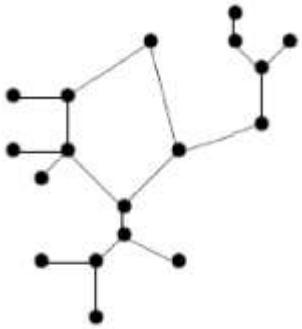
Занятие 8. *<u>Неориентированные деревья</u>*

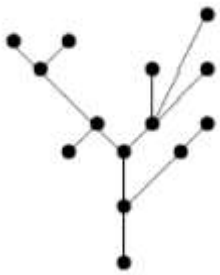
Вопросы к занятию:

1. Дерево.
2. Лес.
3. Свойства деревьев.
4. Вершина максимального типа дерева.
5. Алгоритм нахождения центра неориентированного дерева.
6. Кодирование деревьев.
7. Код Прюфера.
8. Восстановление дерева по коду Прюфера.

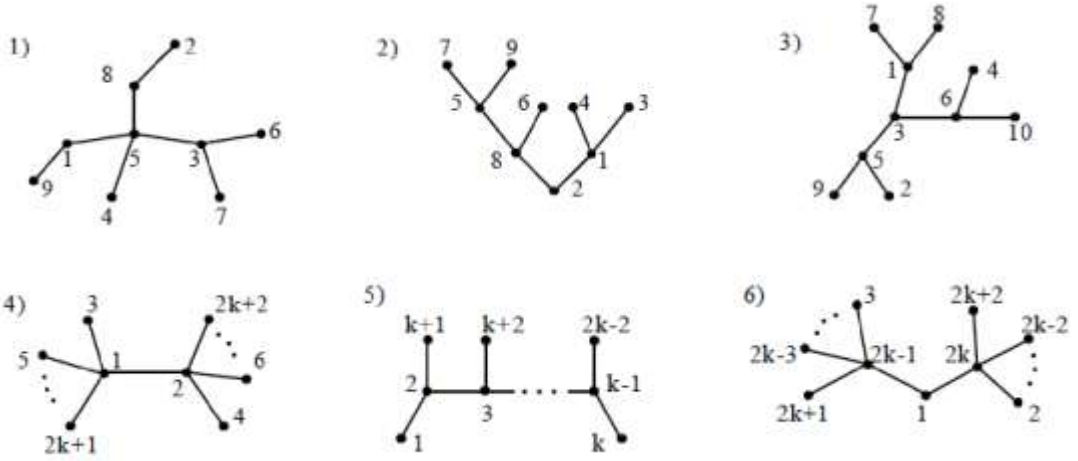
Задачи:

1. Среди графов, изображенных на рисунке, определить дерево. Занумеровать вершины дерева. Определить его радиус, диаметр и центр.





2. Доказать, что центр дерева состоит из одной вершины, если диаметр этого дерева является четным числом, и из двух смежных вершин, когда диаметр – число нечетное.
3. Построить код Прюфера для деревьев:



4. Является ли н-граф, заданный списком ребер, деревом? Если да, то определить вершины максимального типа. Найти код Прюфера.

1) f= (1,2,3,4,7,7,7,8,8,10,11,10)
   g = (4,3,4,7,5,6,8,9,10,11,12,13)
2) f= (1,2,3,4,5,8,5,6,5,9,11,11)
   g= (4,4,4,5,7,7,6,10,9,11,12,13).

5.Задать дерево списком ребер, если его код Прюфера имеет вид:

1. (1,1,1,2,2,7,7,7,6,11); 2) (7,7,5,5,5,9,7,9,9,11).

Занятие 9. *Ориентированное дерево*

Вопросы к занятию:

1. Ориентированное дерево.
2. Лист, ветвь ордерева.
3. Уровень вершины.
4. Ярус ордерева.
5. Высота ордерева.
6. Бинарное дерево.
7. Корневое дерево.

Задачи:

1. Дерево задано списком ребер.

1) f= (1,2,3,4,7,7,7,8,8,10,11,10)
   g = (4,3,4,7,5,6,8,9,10,11,12,13)
2) f= (1,2,3,4,5,8,5,6,5,9,11,11)
   g= (4,4,4,5,7,7,6,10,9,11,12,13).

Ориентировать дерево, выбрав в качестве корня:
а) вершину степени 2; б) висячую вершину; в) вершину максимального типа. Определить ярусы и высоту дерева.

2. Движение из пункта 1 в пункт 8 разрешается только в направлении стрелок. В каждом пункте можно бывать не более одного раза. Сколькими способами можно попасть из пункта 1 в пункт 8? Какой из этих путей кратчайший, какой самый длинный?

1 2 3

7 8 9

3. Определить число возможных маршрутов из пункта 1 в пункт 9 и длину наикратчайшего из них.

4.

). Из города A в город B ведут несколько дорог (карту дорог см. на рис.11). Найдите число маршрутов автомобильного путешествия из A в B, учитывая, что при движении автомобиль должен все время приближаться к B.

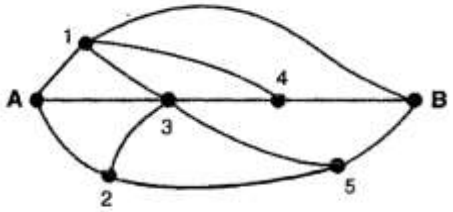


Рис. 11

5.

Андрей пошел с отцом в тир. Уговор был такой: Андрей делает пять выстрелов и за каждое попадание получает право еще на два выстрела. Андрей выстрелил 25 раз. Сколько раз он попал?

Занятие 10. *Паросочетания и покрытия.*

Вопросы к занятию:

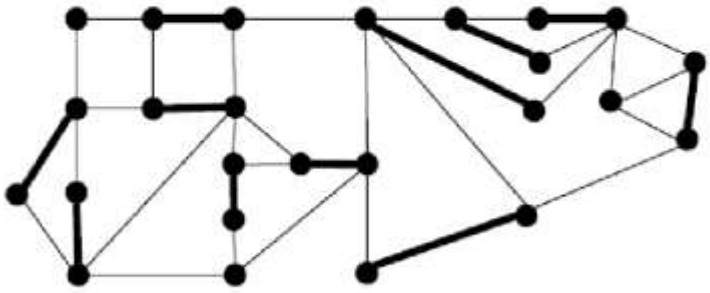
1. Независимые и покрывающие множества.
2. Клики.
3. Теорема о числах независимости и покрытий.
4. Максимальные независимые множества вершин, их поиск.
5. Кратчайшее вершинное покрытие, алгоритмы его поиска.
6. Доминирующие множества.
7. Паросочетание.
8. Совершенное паросочетание.

Задачи:

1. Найдите наибольшее паросочетание и наименьшее реберное покрытие для графов P_6, P_7, $K_{3,7}$.

2. Сколько наибольших паросочетаний имеется в графе 1) P_5; 2) P_6; 3) C_5; 4) C_6; 5) K_4; 6) K_5?

3. Является ли показанное на рисунке паросочетание наибольшим?



4. Сколько имеется максимальных (не имеющих продолжения) чередующихся путей относительно показанного на рисунке паросочетания, начинающихся в вершине a? Есть ли среди них увеличивающий путь? Есть ли вообще для данного паросочетания

Занятие 11. Метод критического пути

Построить сетевой график, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг с помощью данных, представленных в таблице.

Занятие 12. Вероятностные характеристики сетевых планов

Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью. Данные приведены в таблице.

Занятие 13. Методы оптимизации стоимости сетевых проектов

В таблице представлены данные. Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10. Считая tпес продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью (tпес = tmax), а tопт – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью (tопт = tmin), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Занятие 14. Оперативное управление

Требуется:

1) построить сетевой график вида «событие-вершина» с минимальной длительностью проекта;
2) рассчитать время раннего начала и окончания событий;
3) рассчитать время позднего начала и окончаний событий;
4) рассчитать частные резервы времени;
5) рассчитать полный резерв времени;
6) определить критический путь;
7) построить график Ганта;
8) построить график потребности в ресурсах;
9) реструктурировать график Ганта в условиях ограничения ресурсов

Занятие 15. Контрольная работа

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Ковалева, Л. Ф. Дискретная математика в задачах : учебное пособие : [16+] / Л. Ф. Ковалева. – Москва : Евразийский открытый институт, 2011. – 142 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93273 – ISBN 978-5-374-00514-1. – Текст : электронный.
2. Триумфгородских, М. В. Дискретная математика и математическая логика для информатиков, экономистов и менеджеров : учебное пособие / М. В. Триумфгородских. – Москва : Диалог-МИФИ, 2011. – 180 с. : табл., граф., ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=136106. – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-86404-238-0. – Текст : электронный.

Дополнительная литература

1. Звонкин, А. К. Графы на поверхностях и их приложения/А.К. Звонкин, С. К Ландо. - М.: МЦНМО, 2010. Электронный ресурс: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=63250&sr=1
2. Ковалева, Л. Ф. Дискретная математика в задачах : учебное пособие / Л.Ф. Ковалева. - Москва: Евразийский открытый институт, 2011. - 142 с. Электронный ресурс: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93273

Интернет-ресурсы

- Электронная библиотека http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=231616
- Электронная библиотека http://znanium.com/bookread2.php?book=241722
- Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru