Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической
работе
_____ С.Н. Титов

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ЕГЭ

Программа учебной дисциплины модуля
«Специальные разделы предметной области»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Экономика

(очная форма обучения)

Составитель: Глухова Н.В.,
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Экономические задачи в ЕГЭ» относится к дисциплинам по выбору части, формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1. Дисциплины (модули) модуля «Специальные разделы предметной области» учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Экономика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин: Аналитическая геометрия на плоскости, Аналитическая геометрия в пространстве, Основания геометрии и методы изображений, численные методы, теория вероятностей с элементами теории случайных процессов, финансовая математика, статистический анализ экономических данных, проективная геометрия, математическая логика и теории алгоритмов, дискретная математика с элементами сетевого планирования, международная торговля и маркетинг, методика формирования финансовой грамотности, написания курсовых работ № 1 и № 2, прохождения практики по построению изображений.

Результаты изучения дисциплины являются основой для прохождения практики: Производственная (научно-исследовательская работа) Преддипломная практика и государственной итоговой аттестации.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины является подготовка учителя к будущей профессиональной деятельности: формирование способности к преподаванию математики как в обычных общеобразовательных классах, так и в классах с углубленным изучением математики.

Задачей освоения дисциплины является подготовка будущего учителя к индивидуальной работе с одаренными детьми, к подготовке учащихся к единому государственному экзамену, закрепить умение решать задачи повышенной сложности школьного курса математики.

В результате освоения программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	Знает	Умеет	владеет
ПК-11. Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) и в области образования.			

ПК-11.2. Умеет самостоятельно и в составе научного коллектива решать конкретные задачи профессиональной деятельности; самостоятельно и под научным руководством осуществлять сбор и обработку информации; способен применять полученные знания для объяснения актуальных проблем и тенденций развития предмета; проводить исследовательскую работу в соответствии с индивидуальным планом. ПК-11.3. Владеет базовыми представлениями о принципах организации и осуществления исследований, практическими навыками осуществления исследований; применяет навыки комплексного поиска, анализа и систематизации информации по изучаемым проблемам с использованием научной и учебной литературы, информационных баз данных.		ОР-1 Решать задачи профессиональной деятельности, работать с одаренными детьми ОР -2 осуществлять поиск информации, применять полученные знания для решения актуальных проблем преподавания предмета	ОР-3. навыками комплексного поиска, анализа и систематизации информации по изучаемым проблемам с использованием научной и учебной литературы, информационных баз данных.

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
10	3	108	18	30	-	33	экзамен (27)
Итого:	3	108	18	30	-	33	27

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
10 семестр				
Задачи на проценты и кредиты	6	12	-	13
Оптимизационные экономические задачи	12	18	-	20
Экзамен	-	-	-	27
Всего по дисциплине:	**18**	**30**	**-**	**33**

3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

***1.* Задачи на проценты и кредиты**

Простые и сложные проценты. Задачи на вклады, инвестирование. Задачи на кредиты с аннуитетными платежами**.** Задачи на кредиты с аннуитетными и дифференцированными платежами. Задачи на кредиты с дополнительными условиями. Задачи на кредиты со специальной схемой погашения.

2. Оптимизационные экономические задачи.
Оптимизационные задачи в ЕГЭ. Линейные и нелинейные задачи. Графический метод решения задач. Применение производных в экономике. Задачи на совместную работу. Экономические задачи, решаемые в целых числах.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:
- решение задач (домашних заданий) по изучаемым темам;
- выполнение групповых интерактивных заданий.

ОС-1. Контрольная работа.
Примерный вариант
1. Планируется взять кредит 15 декабря на 31 месяц. Условия возврата
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с первого по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа тридцатого месяца долг должен быть 100 тыс. руб.

- к 15 числу 31-го месяца кредит должен быть погашен.
Общие выплаты составили 555 тыс. руб. Какова сумма кредита?
2.
Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 96 литров она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба?
3. Может ли частное трехзначного числа и суммы его цифр а) быть равно 89? б) быть равно 86? в) Каково максимально возможное значение данного частного?

ОС-2. Групповое интерактивное задание.

Составление банка задач ЕГЭ по заданной теме. Микрогруппа осуществляет систематизацию заданий ЕГЭ прошлых лет по заданной теме, выделяет сходства и различия, составляет систему задач для формирования у учащихся уметь решать задачи по данной теме.
Задачи на кредиты
Текстовые задачи ЕГЭ
Экономические задачи на делимость и другие свойства целых чисел.
Арифметические и геометрические прогрессии в экономических задачах ЕГЭ .

ОС-3 Групповое интерактивное задание 2.

Студенты по микрогруппам с использованием материалов, изученных в рамках дисциплины разрабатывают конспект занятия по подготовке к ЕГЭ для школьников. Проведение фрагмента занятия.
Возможные темы:
Задачи на кредиты
Текстовые задачи ЕГЭ с экономическим содержанием
Экономические задачи на делимость и другие свойства целых чисел.
Арифметические и геометрические прогрессии в экономических задачах ЕГЭ .

ОС-4. Индивидуальное задание

Студенты получают чужие решения задач ЕГЭ и критерии оценивания и оценивают по ним полученные работы (возможна взаимопроверка контрольных). Указать все ошибки.
Примерный вариант:

Дана задача. «На доске записано более 11, но менее 15 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно – 4, среднее арифметическое положительных из них равно 3, а среднее арифметическое отрицательных из них равно – 6. а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел больше, положительных или отрицательных? в) Сколько записано положительных чисел?»

Ученик предложил такое решение «Так как среднее всех чисел отрицательно, следовательно, отрицательных чисел больше. Это подтверждается еще и тем, что среднее всех отрицательных больше по модулю, чем среднее всех положительных. Таким образом, отрицательных, очевидно, больше. Пусть имеется k положительных чисел и n – отрицательных. Тогда всего чисел k + n. Так как среднее – это сумма всех чисел, деленная на их количество, следовательно, сумма всех чисел равна –4(k +n), сумма всех положительных равна 3k, сумма всех отрицательных: –6n. Тогда

$3k – 6n = –4k – 4n$

$7k = 2n$

Таким образом, k делится на 2, а n делится на 7. Чисел меньше 15, поэтому отрицательных чисел может быть либо 7, либо 14. Если отрицательных 14, то положительных будет 0, а 0 не делится на 2, поэтому 14 чисел быть не может. Значит, отрицательных чисел 7. Положительных меньше (и их количество делится на 2), значит, их либо 6, либо 4, либо 2. Но 7 + 2 = 9, 7 +4 = 11, а чисел больше 11, значит, положительных чисел 6, а всего чисел 13. Ответ: а) 13, б) отрицательных больше, в) 6».

Прочитайте внимательно решение. Есть ли в данном решении ошибки? Укажите их все и дайте правильное решение.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

Глухова Н.В., Фолиадова Е.В. Олимпиадные и исследовательские задачи в общем и профессиональном математическом образовании: учебное пособие для подготовки магистров и бакалавров направления подготовки «Педагогическое образование» физико-математического профиля – Ульяновск. УлГПУ им. И.Н. Ульянова. 2018 – 66 с.

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Контрольная работа ОС-2 Интерактивное групповое задание № 1 ОС-3 Интерактивное групповое задание № 2 ОС-4 Индивидуальное задание	ОР-1 Решать задачи профессиональной деятельности, работать с одаренными детьми ОР -2 осуществлять поиск информации, применять полученные знания для решения актуальных проблем преподавания предмета ОР-3. навыками комплексного поиска, анализа и систематизации информации по изучаемым проблемам с использованием
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-5 Экзамен в форме устного собеседования	

		научной и учебной литературы, информационных баз данных.

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Текстовые задачи ЕГЭ, их классификация
2. Сложные проценты.
3. Задачи на вклады.
4. Методы решения текстовых задач в целых числах.
5. Задачи на совместную работу.
6. Текстовые задачи на делимость.
7. Применение сравнений в решении задач ЕГЭ.
8. Применение формул арифметических и геометрических прогрессий.
9. Оптимизация в задачах на делимость
10. Классификация экономических задач ЕГЭ.
11. Задачи на проценты и кредиты.
12. Задачи на кредиты с равными платежами
13. Задачи на кредиты с дифференцированными платежами.
14. Задачи на равные и дифференцированные платежи с дополнительными условиями.
15. Оптимизационные задачи решаемые графическим методом.
16. Оптимизационные задачи, решаемые с помощью производных
17. Задачи на кредиты со специальной схемой погашения.
18. Арифметические прогрессии в задачах ЕГЭ.
19. Геометрические прогрессии в задачах ЕГЭ.
20 Нелинейные оптимизационные задачи.
21. Экономические задачи с параметрами.
22. Определение количества решений в задачах с параметрами.
23. Аналитический метод решения задач с параметрами.
24. Геометрический метод решения задач с параметрами.
25. Критерии проверки задач ЕГЭ.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
10 семестр	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 Баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. Балл	9 баллов max	24 балла Max	236 баллов max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий (семестр 10)

Практическое занятие № 1. Задачи по вкладам с процентами

1. *Вкладчик внес в банк 12000 р. Банк выплачивает 3% годовых. Через 2 года 3 месяца и 7 дней вкладчик закрыл счет. Какую сумму выплатил банк?*
2. *В банк помещена сумма 3 900 000 рублей под 50 % годовых. В конце каждого из первых четырех лет, после начисления процентов, вкладчик вносит одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился на 725%. Какую сумму вкладчик вносил в банк ежегодно?*
3. *За время хранения вклада в банке процент по нему начислялся ежемесячно в размере 5%, затем 8% и, наконец, $11^1/_9$ %. Известно, что под действием каждой процентной ставки вклад находился целое число месяцев. По истечению срока хранения первоначальной суммы вклад увеличился на 96%. Определите срок хранения вклада.*
4. *Некоторая сумма, больше 1000 рублей, была помещена в банк, и после первого года хранения проценты, начисленные на вклад, составили 400 рублей. Владелец вклада добавил на счет 600 рублей. После второго года хранения и начисления процентов сумма на вкладе стала равна 5500 рублей. Какова была первоначальная сумма вклада, если процентная ставка банка для первого и второго года хранения была одинакова?*

Практическое занятие № 2. Экономические задачи на проценты

Задания для решения

1. Цена некоторого товара была повышена сначала на 10%, затем еще на 120 рублей и, наконец, еще на 5%. Какова была первоначальная цена товара, если в результате повышение составило 31,25%?
2. Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 р. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 р. Первый брокер продал 75% своих акций, а второй 80% своих. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?
3. Владимир поместил в банк 3600 тысяч рублей под 10% годовых. В конце каждого из первых двух лет хранения, после начисления процентов, он дополнительно вносил на счёт одну и ту же фиксированную сумму. К концу третьего года, после начисления процентов, оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 48,5%. Какую сумму Владимир ежегодно добавлял ко вкладу? [20]
4. Вклад в размере 6 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размеров в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 15 млн рублей
5. Инвестор приобретает первый актив на 300000 руб., второй актив на 700000 руб. и третий актив на 200000 руб. за счет собственных средств. Берет взаймы 150000 руб. под 12 % и покупает на 60000 руб. первый актив, на 50000 руб. второй актив, на 40000 руб. третий актив. Вероятность распределения доходности активов представлена в табл. 11:

Период (год)	1	2	3
Первый актив			
Доходность (%)	32	33	25
Вероятность (%)	50	35	15
Второй актив			
Доходность (%)	38	20	14
Вероятность (%)	40	35	25

Третий актив			
Доходность (%)	18	12	16
Вероятность (%)	45	35	20

Вычислите ожидаемую доходность, полученного портфеля.

Практическое занятие № 3. Текстовые задачи ЕГЭ на делимость

Задания для решения

1. На доске записано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно – 3, среднее арифметическое положительных из них равно 4, а среднее арифметическое отрицательных из них равно – 8. а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел больше, положительных или отрицательных? в) Каково максимально возможное число положительных чисел?

2. В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в 2 раза?

б) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 1?

в) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

3. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$)

а) Может ли сумма данных чисел быть равна 5?

б) Каково наибольшее n, если сумма всех чисел меньше 950?

в) Найти все возможные n, если сумма всех данных чисел равна 141.

4. Найдите все такие пары взаимно-простых чисел a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа b/a.

Практическое занятие № 4. Оптимизация в целочисленных задачах

Задания для решения

1. Может ли частное трехзначного числа и суммы его цифр а) быть равно 89? б) быть равно 86? в) Каково максимально возможное значение данного частного?

2. На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b , записанные на доске, заменяются на два числа: или $a + b$ и $2a - 1$, или $a + b$ и $2b - 1$. (например, из чисел 2 и 3 можно получить либо 3 и 5, либо 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?

в) Сделали 1007 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

3. В парке n аттракционов. В воскресенье парк посетило ровно n детей. Стоимость каждого аттракциона 10 рублей. Каждый ребенок потратил либо 30, либо 160 рублей, при том не все дети потратили денег поровну (один аттракцион можно посетить много раз).

а) Могла ли выручка каждого аттракциона составить 60 рублей?

б) Какое наименьшее количество детей могло быть, если известно, что все аттракционы получили одинаковую выручку?

в) Пусть любые два аттракциона имеют разную выручку (возможно нулевую). Каково наибольшее возможное количество посетивших парк детей?

4. На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое 6 наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое 6 наибольших равно 15

а) Может ли наименьшее из этих 11 чисел быть равно 3?

б) Может ли среднее арифметическое всех 11 чисел равняться 9?

в) Пусть B – шестое по величине число, а S – среднее арифметическое всех 11 чисел. Найти наибольшее значение S – B.

Практическое занятие № 5. Задачи на кредиты с равными платежами

Задания для решения

№ 1. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму.
Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на *r* % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите *r*.

2. Пусть планируется взять кредит в банке на некоторый период (месяц, год) в размере суммы S.

Условия его возврата следующие:

- в начале каждого периода долг увеличивается на q % по сравнению с концом предыдущего периода.

- до конца каждого периода необходимо выплатить часть долга.

Найти общую сумму выплат, после полного погашения кредита, если **долг выплачивается равными ежемесячными (ежегодными) платежами.**

3. Георгий планирует взять кредит в банке в размере 150000 руб. на 4 года.

Банк предлагает две схемы погашения кредита.

В начале каждого года долг будет увеличиваться на 10 % по сравнению с концом предыдущего года. Далее до конца года необходимо выплачивать одним платежом часть долга. В результате кредит будет погашен четырьмя равными платежами.

4. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся часть долга (т.е. увеличивает долг на 14,5%), Затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил платеж двумя равными платежами (т.е. за два года)?
5. 31 декабря 2014 года Владимир взял в банке некоторую сумму в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся часть долга (т.е. увеличивает долг на 14%), Затем Владимир переводит в банк 4 548 600 рублей. Какую сумму взял Владимир в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами?

Практическое занятие № 6. Задачи на кредиты с дифференцированными платежами

Задания для решения

1. Пусть планируется взять кредит в банке на некоторый период (месяц, год) в размере суммы S.

Условия его возврата следующие:

- в начале каждого периода долг увеличивается на q % по сравнению с концом предыдущего периода.

- до конца каждого периода необходимо выплатить часть долга.

- после платежа долг каждый период должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на конец предыдущего периода.

Найти общую сумму выплат, после полного погашения кредита.

2. 1 июля 2019 года планируется взять кредит 900 тыс. руб. Первого числа каждого месяца банк начисляет 1 % на оставшуюся сумму долга. Затем в банк переводится платеж. На какое минимальное количество месяцев может быть взят кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 тыс.

3. Георгий планирует взять кредит в банке в размере 150000 руб. на 4 года.

Банк предлагает две схемы погашения кредита.

В начале каждого года долг будет увеличиваться на 10 % по сравнению с концом предыдущего года. Далее до конца года необходимо выплачивать одним платежом часть долга. В результате кредит будет погашен четырьмя равными платежами.

Схема выплаты кредита при дифференцированных платежах:

В начале каждого года долг увеличивается на 10 % по сравнению с концом предыдущего года. Далее до конца года необходимо выплачивать одним платежом часть долга. В результате платежа долг каждый год уменьшается на одну и ту же сумму.

Какая схема для Георгия будет самой оптимальной? Чему равна суммарная переплата при каждой схеме?

4. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс.рублей?

Практическое занятие № 7. Задачи на кредиты с дополнительными условиями

Задания для решения

1. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысячи рублей?

2. Планируется взять кредит 15 декабря на 31 месяц. Условия возврата

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с первого по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- 15-го числа тридцатого месяца долг должен быть 100 тыс. руб.

- к 15 числу 31-го месяца кредит должен быть погашен.

Общие выплаты составили 555 тыс. руб. Какова сумма кредита?

5. 31 декабря 2014 года Евгений взял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся часть долга (т.е. увеличивает долг на а%), Затем Евгений переводит в банк очередной транш. Евгений выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 540 тыс. рублей, а во второй 649,6 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Евгению?

Практическое занятие № 8. Задачи со специальной схемой погашения кредита

1. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 3 млн рублей.

2. 15-го января банк выдал кредит на 6 месяцев в размере 1 млн. рублей. условия его возврата таковы: 1 числа каждого месяца долг увеличивается на 5 % по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-е по 14-е число необходимо выплатить часть долга. График погашения показан в таблице:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в % от кредита)	100 %	90 %	80 %	70 %	60 %	50 %	0

Найдите наибольшее r, при котором сумма выплат не превзойдет 1,2 млн руб.

15-го января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн. рублей. условия его возврата таковы: 1 числа каждого месяца долг увеличивается на целое число процентов (r %) по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-е по 14-е число необходимо выплатить часть долга. 15-го числа долг должен составлять определенное число млн. рублей. (см. таблицу):

15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее r, при котором сумма выплат не превзойдет 1,2 млн руб.

4. Фермер получил кредит в банке под определенный процент. Через год фермер вернул в банк в счет погашения кредита ¾ от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту?

Практическое занятие № 9. Отчет по интерактивному групповому заданию 1 (ОС-2)

Практическое занятие № 10. Оптимизационные задачи

Задания для решения

№ 1. Необходимо построить трубопровод длиной 1243 метра из труб длинной 5 и 7 метров (при этом трубы нельзя разрезать). Сколькими способами можно это сделать? Пусть стоимость трубы длиной 5 м составляет 800 р., а 7 м – 900 р. Как построить требуемый трубопровод, чтобы расходы на трубы были минимальными.

№ 2. Школа участвует в конкурсе добровольческих движений. Она может составить группы для озеленения города, или группы для украшения мемориальных комплексов ветеранам войны. По условию конкурса в каждую группу по озеленению надо включить 16 школьников и прикрепить к ним 9 студентов и одного учителя. В группу по украшению мемориальных комплексов надо включать 6 школьников, 7 студентов и двух учителей. В конкурсе изъявили желание принять участие 15 учителей, 96 детей и 69 студентов, находящихся на педагогической практике в этой школе. За каждую группу по озеленению школа получает 50 баллов, а за каждую группу, работающую в мемориальном комплексе – 70 баллов. Каким образом школа может набрать максимальное число баллов? Докажите, что Ваше решение наилучшее.

№.3. Школа выиграла грант и отправила 90 детей на летнюю недельную экскурсию в Санкт-Петербург и 60 в Москву. Пока дети были еще на экскурсии, школа выиграла новый грант на отправку детей в летний лагерь. 60 детей можно отправить в лагерь в Ялту, 40 в Сочи, а 50 – в Лазаревское. Минимальная стоимость билета в Ялту из Москвы составляет 3 тысячи, а из Санкт-Петербурга – 4,5 тыс. Билет в Лазаревское из Москвы стоит 2,5 тысячи, а из СПб– 3,5 тыс. Минимальная стоимость проезда до Сочи из Москвы равна 4 тысячам, а из Санкт-Петербурга – 6,5 тысячам. Чтобы освоить грант, решено было везти детей сразу с экскурсии в лагерь. Грант позволяет оплатить и стоимость путевки, и стоимость проезда, но необходимо доказать финансовому инспектору, что предлагаемый план перевозки детей является самым дешевым из возможных. В противном случае инспектор не подпишет документы. Найдите самый дешевый план перевозки детей и докажите инспектору, что он наилучший.

№ 4. Фирма выпускает два вида продукта в день. Производственный процесс составляет 430 минут в день (5 десятиминутных перерывов при восьми часовом рабочем дне). Для изготовления единицы продукта первого вида требуется одна минута, а единицы второго – две минуты. Продукции первого вида требуется не более 300 единиц в день, а второго – не более 230 единиц в день. Реализация единицы продукции первого вида приносит 2 доллара чистой прибыли, а второго – 3 доллара. Каков оптимальный производства, максимизирующий прибыль, чему равна максимальная прибыль?

№ 5. Фирма выпускает два вида изделий. Для изготовления одного изделия первого вида требуется 2 кг металла, а второго вида – 4 кг металла. Изделие первого вида может быть продано по цене 30 тыс. рублей за единицу, а второго – по цене 20 тысяч рублей за единицу, причём первого изделия можно реализовать не более 40 единиц, а второго не более 20. Всего имеется 100 кг металла. Каков оптимальный план производства, максимизирующий доход от продажи данных изделий, чему равна максимальная прибыль доход?

Ответ: 40 изделий первого вида и 5 изделий второго вида принесут доход в 1 мил.300 тыс. рублей.

Практическое занятие № 11. Графический метод решения оптимизационных задач

1.1. Фирма выпускает два вида продукта в день. Производственный процесс составляет 430 минут в день (5 десятиминутных перерывов при восьми часовом рабочем дне). Для изготовления единицы продукта первого вида требуется одна минута, а единицы второго – две минуты. Продукции первого вида требуется не более 300 единиц в день, а второго – не более 230 единиц в день. Реализация единицы продукции первого вида приносит 2 доллара чистой прибыли, а второго – 3 доллара. Каков оптимальный план производства, максимизирующий прибыль, чему равна максимальная прибыль?

1.2. В первой передаче имеется 18 минут рекламного времени, а во второй – 12 минут. Фирма имеет рекламные ролики трёх видов, и на основании анализа рынка считает, что 13 минут времени должно быть отведено для демонстрации роликов, рассчитанных на домохозяек, 7 минут – для демонстрации роликов, рассчитанных на молодёжь, и 10 минут – для демонстрации роликов, рассчитанных на бизнесменов. Известны рейтинги передач: первую передачу смотрят среди всех домохозяек 60 %, среди молодёжи – 50 %, среди бизнесменов – 30 %; для второй передачи соответствующие рейтинги составляют 40, 70 и 20 %. Распределите время показа рекламных роликов между передачами с целью максимизации суммарного времени просмотра роликов целевой аудиторией.

1.3. Фирма может выполнять работы двух типов. Для выполнения одного заказа первого типа требуется один инженер, 16 рабочих и 9 технологов, а для выполнения одного заказа второго типа – 2 инженера, 6 рабочих и 7 технологов. Выполнение одного заказа первого типа приносит чистую прибыль в 5 тыс. руб., а второго – в 7 тыс. руб. Фирма дала объявление о найме на работу и получила 15 заявлений от инженеров, 96 – от рабочих, 69 – от технологов. Какое количество заказов первого и второго типа требуется взять фирме для максимизации прибыли? Какое количество сотрудников следует нанять? Чему равна максимально возможная прибыль?

1.4. На заводе есть два корпуса и три пункта аварийной эвакуации. Время на переход из первого корпуса к первому пункту эвакуации составляет 3 минуты, ко второму – 4 минуты, к третьему 2,5 минуты. Для второго корпуса соответствующие временные затраты составляют 4,5 минуты, 6,5 минут и 3,5 минуты. В первом корпусе работают 600 человек, во втором – 900. Первый пункт может принять 600 человек, второй – 500 человек, третий – 400 человек. Составить оптимальный план эвакуации, минимизирующий суммарное время, необходимое, чтобы все сотрудники добрались до пунктов эвакуации.

1.5. Фирма выпускает два вида изделий. Для изготовления одного изделия первого вида требуется 2 кг металла, а второго вида – 4 кг металла. Изделие первого вида может быть продано по цене 30 тыс. рублей за единицу, а второго – по цене 20 тысяч рублей за единицу, причём первого изделия можно реализовать не более 40 единиц, а второго не более 20. Всего имеется 100 кг металла. Каков оптимальный план производства, максимизирующий доход от продажи данных изделий, чему равна максимальная прибыль?

1.6. Московская корпорация получает два крупных заказа: один в Иркутске (требуется 60 сотрудников) и второй в Тюмени (90 сотрудников), и направляет сотрудников для их выполнения. На момент получения заказа 60 сотрудников находились в Казани, 40 – в Челябинске, 50 – в Москве. Продолжительность перелёта из Казани в Тюмень равна 3 часам (данные условные), в Иркутск – 4,5 часам. На перелёт из Челябинска в Тюмень требуется 2,5 часа, в Иркутск – 3,5 часа. Перелёт от Москвы до Тюмени занимает 4 часа, а до Иркутска – 6,5 часов. Составить оптимальный план распределения сотрудников по городам так, чтобы суммарное время перелёта было минимальным.

Практическое занятие № 12. Отчет по групповому интерактивному заданию. Демонстрация фрагментов уроков (ОС-3).

Практическое занятие № 13. Задачи на оптимизацию с производными

1. Огораживают спортивную площадку прямоугольной формы площадью 2500 м^2. Каковы должны быть ее размеры, чтобы на забор ушло наименьшее количество сетки «рабицы»?
2. Для конструкторского бюро строится комната в форме прямоугольного параллелепипеда, одна из стен которой должна быть сделана из стекла, а остальные из обычного материала. Высота комнаты должна быть 4 м, а площадь 80 м^2.

Известно, что 1 м^2 стеклянной стены стоит 750 рублей, а из обычного материала 500 рублей. Какими должны быть размеры комнаты, чтобы общая стоимость всех стен была наименьшей?

3. На странице книги печатный текст должен занимать (вместе с промежутками между строк) 192 см^2. Верхнее и нижнее поля занимают по 4 *см*, левое и правое – по 3 см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?
4. Найдите размеры участка прямоугольной формы, имеющего наибольшую площадь, если его периметр равен 200 м

Практическое занятие № 14. Контрольная работа

Практическое занятие № 15. Применение критериев проверки. Коррекция.

№ 1. Любознательный школьник сложил $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ = 1. «А что это мы все дроби приводим к общему знаменателю? А не привести ли их к общему числителю?» – подумал школьник и написал: $\frac{2}{6}+\frac{2}{3}=\frac{2}{2}$. Школьник решил этим не ограничиваться и представил 2 в числителе в виде разности 7 – 5: $\frac{7-5}{6}+\frac{7-5}{3}=\frac{7-5}{2}$. Это выражение школьник переписал так: $\frac{7}{6}-\frac{5}{6}+\frac{7}{3}-\frac{5}{3}=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}$. Затем он перенес все дроби с числителем 5 в левую часть, а с числителем 7 – в правую: $\frac{5}{2}-\frac{5}{6}-\frac{5}{3}=\frac{7}{2}-\frac{7}{6}-\frac{7}{3}$. Затем вынес общий множитель за скобки: $5(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3})=7(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3})$. Сократив равные скобки в правой и левой части, школьник получил, что 7 = 5. «Так, пожалуй, можно доказать, что любые числа между собой равны», – подумал школьник – «А от нас это скрывали!». Имеются ли ошибки в рассуждении школьника и, если да, то в чем они?

№ 2. В озеро заселяют окуней и карасей. Средняя масса окуня составляет 1 кг, карася – 0,6 кг. Имеется два вида пищи, ежедневный запас которой поддерживается для первого типа на уровне 900 кг, а второго – 3300 кг. Один окунь в среднем за день потребляет 20 г пищи первого типа и 60 г пищи второго типа, для карася соответствующие величины составляют 10 и 50 г. Как следует заселить озеро, чтобы максимизировать суммарную биомассу рыб? Чему равна максимальная суммарная биомасса?

Наташа решила задачу так: Обозначим за x количество окуней, а за y – карасей. Тогда количество первое пищи, которую они съедят за день равно $20x + 10y \le 900$, а количество пищи второго вида: $60x + 50y \le 3300$. Сократим каждое неравенство на 10 и решим их в системе:

$2x + y \le 90$

$6x + 5y \le 330$

Из второго неравенства вычитаем первое, умноженное на 3, получим $2y \le 60$, следовательно, $y \le 30$. Значит максимально можно заселить 30 карасей. Тогда исходя из первого неравенства максимальное количество окуней может быть равно $2x \le 60$, $x \le 30$. Данный результат удовлетворяет и второму неравенству

6·30 + 5·30 = 180 + 150 = 330. Суммарная биомасса составит 30·1 + 30·0,6 = 48 кг.
Ответ: следует заселить в водоем 30 окуней и 30 карасей, максимальная биомасса 48 кг».
Есть ли в решении Наташи ошибки? Укажите их и дайте свое решение задачи.

3. Дана задача. «На доске записано более 11, но менее 15 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно – 4, среднее арифметическое положительных из них равно 3, а среднее арифметическое отрицательных из них равно – 6. а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел больше, положительных или отрицательных? в) Сколько записано положительных чисел?»

Ученик предложил такое решение «Так как среднее всех чисел отрицательно, следовательно, отрицательных чисел больше. Это подтверждается еще и тем, что среднее всех отрицательных больше по модулю, чем среднее всех положительных. Таким образом, отрицательных, очевидно, больше. Пусть имеется k положительных чисел и n – отрицательных. Тогда всего чисел k + n. Так как среднее – это сумма всех чисел, деленная на их количество, следовательно, сумма всех чисел равна –4(k +n), сумма всех положительных равна 3k, сумма всех отрицательных: –6n. Тогда

$3k – 6n = –4k – 4n$

$7k = 2n$

Таким образом, k делится на 2, а n делится на 7. Чисел меньше 15, поэтому отрицательных чисел может быть либо 7, либо 14. Если отрицательных 14, то положительных будет 0, а 0 не делится на 2, поэтому 14 чисел быть не может. Значит, отрицательных чисел 7. Положительных меньше (и их количество делится на 2), значит, их либо 6, либо 4, либо 2. Но 7 + 2 = 9, 7 +4 = 11, а чисел больше 11, значит, положительных чисел 6, а всего чисел 13.
Ответ: а) 13, б) отрицательных больше, в) 6».

Прочитайте внимательно решение. Есть ли в данном решении ошибки? Укажите их все и дайте правильное решение.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Сеничева, Н.Н. Школьные олимпиады по экономике в научной организации: препринт / Н.Н. Сеничева. - Вологда : ИСЭРТ РАН, 2016. - 100 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/1019495, https://znanium.com/read?id=339289
2. Шелехова, Л.В. Обучение решению сюжетных задач по математике : учебно-методическое пособие / Л.В. Шелехова. - Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. - 166 с. : [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=274518
3. Ячменёв Л.Т. Математика в примерах и задачах для подготовки к ЕГЭ и поступлению в ВУЗ: Учебное пособие - М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 336 с.: - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/500649, https://znanium.com/read?id=32448

Дополнительная литература

1. Кремер, Н. Ш. Математика для поступающих в экономические и другие вузы : учебное пособие / Н. Ш. Кремер, О. Г. Константинова, М. Н. Фридман ; ред. Н. Ш. Кремер. – М.: Юнити, 2015. – 695 с.– Режим доступа: – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114716 (http://znanium.com/go.php?id=872847)

2. Воробьев В. В. Тренировочные варианты для качественной подготовки к ЕГЭ по математике для учащихся 10-11 классов / В.В. Воробьев. - Москва : Директ-Медиа, 2014. - 48 с. . URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233960
3. Математические головоломки профессора Стюарта / Стюарт И., Лисова Н. - М.:Альпина Паблишер, 2017. - 386 с.: (http://znanium.com/catalog/product/1002607) https://znanium.com/read?id=333393
4. Будак, Б. А. Математика: сборник задач по углублённому курсу : учебно-методическое пособие : [12+] / Б. А. Будак, Н. Д. Золотарева, Ю. А. Попов ; под ред. М. В. Федотова. – М. : Лаборатория знаний, 2020. – 329 с. : ил. – (ВМК МГУ - школе). – Режим доступа. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=595231

Интернет-ресурсы

1. Федеральный портал Российское образование: http:// www.edu.ru
2. Единое окно доступа к информационным ресурсам http://window.edu.ru/
3. Научная электронная библиотека «Киберленинка»: https://cyberleninka.ru/search
4.. http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege Открытый банк заданий ЕГЭ
5. http://alexlarin.net Тренировочные варианты ЕГЭ по математике.