Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической
работе
_____ С.Н. Титов
25 июня 2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Программа учебной дисциплины модуля
«Специальные разделы предметной области»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Математика. Иностранный язык

(очная форма обучения)

Составитель: Макеева О.В.
доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дифференциальные уравнения и основы функционального анализа» входит в модуль «Специальные разделы предметной области» части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. Дисциплины (модули) учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Математика. Иностранный язык», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплин «Анализ функций одной переменной», «Многомерный математический анализ», «Аналитическая геометрия», «Теория функций комплексного переменного», «Основы математической обработки информации».

Результаты изучения дисциплины являются необходимыми для изучения дисциплин: «Естественнонаучные и экономические приложения математического анализа», «Физика», «Численные методы», «Теория и методика обучения математике» и прохождения практики: Производственная (педагогическая) Преподавательская практика по математике 2.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целью освоения дисциплины «Дифференциальные уравнения и основы функционального анализа» является подготовка бакалавра к работе учителем математики в общеобразовательной школе. Дисциплина предназначена дать будущим учителям профессиональную (теоретическую и практическую) подготовку в области теории и методики обучения математике на различных ступенях общеобразовательной школы.

Задачей освоения дисциплины является формирование системы знаний, включающих методы анализа и решения основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка, систем дифференциальных уравнений; развитие представлений о дифференциальных уравнениях как аппарате математического моделирования детерминированных процессов; формирование и развитие компетенций будущего учителя математики в теории и практике решения основных типов дифференциальных уравнений, возникающих в различных областях естествознания.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Дифференциальные уравнения» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-12. Способен выделять структурные элементы, входящие в систему познания предметной области (в соответствии с			

профилем и уровнем обучения), анализировать их в единстве содержания, формы и выполняемых функций.			
ПК-12.1. Знает формулировки определений, содержательное значение терминов и понятий предметной области, правила и алгоритмы оперирования с объектами предметной области, понимает взаимосвязь между структурными элементами; имеет представление о функциях и практическом применении изучаемых объектов.	ОР-1. Знает основные понятия теории дифференциальных уравнений ОР-3. Знает базовые типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения ОР-5. Знает приемы решения уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка	ОР-2. Умеет решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными ОР-4. Умеет классифицировать и решать дифференциальные уравнения первого порядка ОР-6. Умеет классифицировать и решать уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка	
ПК-12.2. Умеет выделять и анализировать структурные элементы, входящие в систему познания предметной области; определять логическую взаимосвязь между компонентами предметной области; строить логически верные и обоснованные рассуждения; решать задачи предметной области.	ОР-7. Знает приемы решения линейных дифференциальных уравнений высших порядков ОР-9. Знает методы решения систем дифференциальных уравнений ОР-11. Знает определения основных понятий теории множеств, теории метрических, банаховых, гильбертовых пространств	ОР-8. Умеет классифицировать и решать линейные дифференциальные уравнения высших порядков ОР-10. Умеет классифицировать и решать простейшие системы дифференциальных уравнений ОР-12. Умеет иллюстрировать основные положения теории примерами важнейших числовых множеств и соответствующих пространств, пространств векторов, последовательностей,	

		функций	
ПК-14 Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями. ПК-14.1. Знает роль и возможности применения аппарата предметной области в смежных научных областях, их методологическое и мировоззренческое значение; имеет представление о междисциплинарных связях, научных методах смежных областей ПК-14.2. Умеет определять роль полученных знаний для смежных областей и для школьного курса, применять полученные знания в решении прикладных задач.	ОР-13 Имеет представления о прикладном характере теории дифференциальных уравнений ОР-15. Знает формулировки важнейших результатов теории метрических, банаховых, гильбертовых пространств ОР-17. Знает связь понятий и теорем теории метрических, банаховых, гильбертовых пространств, теории меры и интеграла Лебега с понятиями и теоремами классического анализа, алгебры, геометрии	ОР-14. Умеет составлять и исследовать простейшие математические модели на основе дифференциальных уравнений первого порядка ОР-16. Умеет воспроизводить доказательства некоторых базовых теорем теории множеств, теории функций, функционального анализа и самостоятельно доказывать простые утверждения этих разделов на основе определений ОР-18. Умеет применять некоторые результаты функционального анализа для решения задач математического анализа и элементарной математики	

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
5	5	180	30	50	-	73	экзамен (27)

Итого:	5	180	30	50	-	73	экзамен

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ п/п	Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
5 семестр					
1.	Основные понятия теории ОДУ	2	4	–	6
2.	Дифференциальные уравнения первого порядка	4	6	–	10
3.	Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	2	4	–	8
4.	Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами	4	8	–	8
5.	Системы дифференциальных уравнений	4	4	–	8
6.	Элементы теории множеств	6	8	–	10
7.	Начала функционального анализа	8	16	-	23
	Итого	**30**	**50**	**–**	**73**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Раздел 1. Основные понятия

Дифференциальное уравнение, обыкновенное дифференциальное уравнение, уравнение в частных производных. Порядок уравнения. Общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Задача Коши для уравнения 1-го порядка, разрешенного относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (без доказательства). Особые решения.

Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме. Геометрическая интерпретация основных понятий: поле направлений, интегральные кривые, огибающая семейства кривых.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель дифференциального уравнения. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка: метод вариации произвольной постоянной; метод Бернулли; структура общего решения. Уравнения Бернулли. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Раздел 3. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Дифференциальные уравнения высших порядков, разрешенные относительно старшей производной. Задача Коши для уравнения, разрешенного относительно старшей производной. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши (без доказательства). Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$. Уравнения вида $F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$. Уравнения вида $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$. Уравнения вида $F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$.

Раздел 4. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение. Однородные линейные уравнения. Неоднородные линейные уравнения. Свойства решений линейных уравнений. Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения. Определитель Вронского. Теорема о структуре общего решения однородного и неоднородного уравнения. Решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов и методом вариации произвольных постоянных. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен. Действительные корни (простые, кратные). Комплексные корни (простые, кратные). Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Применение линейных дифференциальных уравнений к изучению свободных и вынужденных колебаний**.**

Раздел 5. Системы дифференциальных уравнений

Системы дифференциальных уравнений. Нормальная форма системы дифференциальных уравнений. Задача Коши для нормальной системы уравнений. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши (без доказательства). Решение систем методом исключения и методом интегрируемых комбинаций.

Раздел 6. Элементы теории множеств

Множество как неопределяемое понятие в теории Кантора. Равномощные множества. Мощность множества. Конечные множества. Счетные множества. Счетность множества рациональных чисел, множества алгебраических чисел. Несчетность отрезка [0;1]. Множества мощности континуум. Сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна. Булеан множества. Теорема Кантора о сравнении мощности множества и мощности его булеана. Множества мощности гиперконтинуум. Бесконечность шкалы мощностей. Парадоксы теории множеств Кантора. Понятие о проблеме континуума. Представление об аксиоматической теории множеств.

Раздел 7. Начала функционального анализа

Метрическое пространство, примеры метрических пространств. Предел последовательности точек метрического пространства. Открытые, замкнутые,

совершенные множества; всюду плотные множества, нигде не плотные множества. Полные метрические пространства, компактные метрические пространства, связные метрические пространства, сепарабельные метрические пространства. Непрерывные отображения метрических пространств, равномерно непрерывные отображения. Сохранение компактности и связности при непрерывных отображениях. Ограниченные отображения. Линейные отображения (линейные операторы). Сжимающие отображения метрических пространств. Теорема Банаха (принцип сжимающих отображений). Примеры.

Нормированные пространства, примеры. Банаховы пространства. Линейные оболочки, подпространства, базисы, размерность. Ряды в нормированных пространствах.

Пространства со скалярным произведением, примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Ортогональные системы, ортогональное дополнение множества, проекция на подпространство. Ряды Фурье по ортогональной системе векторов, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Ортонормированные базисы. Изоморфизм гильбертовых пространств одинаковой размерности.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме подготовки к устным выступлениям (докладам по теме реферата).

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: материалы самостоятельных работ, итоговой контрольной работы / реферата. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
1.	**Оценочные средства для текущей аттестации** ОС-1 Самостоятельная работа ОС-2 Самостоятельная работа ОС-3 Самостоятельная работа ОС-4 Самостоятельная работа ОС-5 Самостоятельная работа ОС-6 Самостоятельная работа ОС-7 Самостоятельная работа ОС-8 Самостоятельная работа ОС-9 Самостоятельная работа ОС-10 Тест ОС-11 Итоговая контрольная работа / реферат	ОР-1. Знает основные понятия теории дифференциальных уравнений ОР-2. Умеет решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными ОР-3. Знает базовые типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения ОР-4. Умеет классифицировать и решать дифференциальные уравнения первого порядка ОР-5. Знает приемы решения уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка ОР-6. Умеет классифицировать и решать уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка ОР-7. Знает приемы решения линейных дифференциальных уравнений высших порядков ОР-8. Умеет решать линейные дифференциальные уравнения высших
2.	**Оценочные средства для промежуточной аттестации** ОС-12 Экзамен в форме устного собеседования	

		порядков ОР-9. Знает методы решения систем дифференциальных уравнений ОР-10. Умеет классифицировать и решать простейшие системы дифференциальных уравнений ОР-11. Знает определения основных понятий теории множеств, теории метрических, банаховых, гильбертовых пространств ОР-12. Умеет иллюстрировать основные положения теории примерами важнейших числовых множеств и соответствующих пространств, пространств векторов, последовательностей, функций ОР-13 Имеет представления о прикладном характере теории дифференциальных уравнений ОР-14. Умеет составлять и исследовать простейшие математические модели на основе дифференциальных уравнений первого порядка ОР-15. Знает формулировки важнейших результатов теории метрических, банаховых, гильбертовых пространств ОР-16. Умеет воспроизводить доказательства некоторых базовых теорем теории множеств, теории функций, функционального анализа и самостоятельно доказывать простые утверждения этих разделов на основе определений ОР-17. Знает связь понятий и теорем теории метрических, банаховых, гильбертовых пространств, теории меры и интеграла Лебега с понятиями и теоремами классического анализа, алгебры, геометрии ОР-18. Умеет применять некоторые результаты функционального анализа для решения задач математического анализа и элементарной математики

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-1 Самостоятельная работа

1. Докажите, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $F(x, y, y') = 0$.
2. Решите уравнение с разделяющимися переменными.
3. Решите однородное дифференциальное уравнение.
4. Покажите, что левая часть уравнения есть полный дифференциал и решите уравнение.
5. Найдите интегрирующий множитель и решите уравнение.

6. Найдите общий интеграл уравнения. Постройте четыре интегральные кривые. Найдите частный интеграл по начальным условиям $y = 4$ при $x = -2$.

Вариант 1

1. $y'\sin x = y\ln y$, $y = e^{tg\left(\frac{x}{2}\right)}$.
2. $y' = y\ln y$.
3. $\left(x^2 + 2xy\right)dx + xydy = 0$.
4. $\left(3y^2 + 2xy + 2x\right)dx + \left(6xy + x^2 + 3\right)dy = 0$
5. $\left(1 + 3x^2\sin y\right)dx - x\mathrm{ctg}ydy = 0$.
6. $y' = y$.

Ответы: 2. $\ln|\ln y| - x = C$; 3. $\ln|x + y| + \dfrac{x}{x + y} + C$; 4. $3xy^2 + x^2y + 3y + x^2 = C$; 5. $\mu = \dfrac{1}{\sin y}$, $\dfrac{x}{\sin y} + x^3 = C$.

Вариант 2

1. $yy' = x - 2x^3$, $y = x\sqrt{1 - x^2}$.
2. $y\left(1 + x^2\right)y' + x\left(1 + y^2\right) = 0$.
3. $x\cos\dfrac{y}{x}dy + \left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx = 0$.
4. $\left(2x + 5y\right)dx + \left(5x + 3y^2\right)dy = 0$.
5. $\left(e^{2x} - y^2\right)dx + ydy = 0$.
6. $yy' + x = 0$.

Ответы: 2. $\left(1 + x^2\right)\left(1 + y^2\right) = C$; 3. $\ln|x| + \sin\dfrac{y}{x} = C$; 4. $x^2 + 5xy + y^3 = C$; 5. $\mu = e^{-2x}$, $y^2 = \left(C - 2x\right)e^{2x}$.

Критерии и шкала оценивания

Критерий	Шкала оценивания (максимальное количество баллов)
Знает основные понятия теории дифференциальных уравнений	4
Знает базовые типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения	5
Умеет решать дифференциальные уравнения первого порядка	20
Владеет навыками составления простейших математических моделей на основе дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными	7
Всего	36

Рекомендации по использованию оценочного средства

Работа выполняется письменно в малых группах по выбору студентов. Работа выполняется в три этапа, на каждом из которых решается по две задачи. Время работы на каждом этапе – 25-45 минут.

ОС-2 Самостоятельная работа

1. Найдите частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Решение выполните двумя способами.
2. Приняв за неизвестную функцию x, решите уравнение.
3. Решите уравнение Бернулли.
4. Найдя путём подбора частное решение, упростите данное уравнение Риккати, а затем решите его.
5. По данным условия задачи составьте дифференциальное уравнение и решите его. Сделайте рисунок.

Вариант 1 Вариант 2

1. $y'\sin x - y\cos x = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
2. $\left(x^2 \ln y - x\right)y' = y$.
3. $y' + y = xy^2$, $y(0) = 1$.
4. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.
5. Найдите кривую, проходящую через точку $A(2;4)$, для которой абсцисса точки пересечения касательной с осью Ox равна удвоенной абсциссе точке касания.

Ответы: 1. $y = -\cos x$; 2. $x = \frac{1}{\ln y + 1 - Cy}$; 3. $y = \frac{1}{1+x}$; 4. $y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{4x} - 1}$, $y = x + 2$.

1. $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$, $y(e) = \frac{e^2}{2}$.
2. $ydx + \left(x + x^2y^2\right)dy = 0$.
3. $y' + 2y = e^x y^2$, $y(0) = 1$.
4. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$.
5. Найдите кривую, проходящую через точку $A(3;2)$, для которой отрезок касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

Ответы: 1. $y = \frac{x^2}{2}\ln x$; 2. $x = \frac{1}{y^2 + Cy}$; 3. $y = e^{-x}$; 4. $y = x + \frac{x}{x+C}$, $y = x$.

Критерии и шкала оценивания

Критерий	Шкала оценивания (максимальное количество баллов)
Знает базовые типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения	10
Умеет решать дифференциальные уравнения первого порядка	26
Всего	36

Рекомендации по использованию оценочного средства

Работа выполняется письменно в малых группах по выбору студентов. Работа выполняется в три этапа (1-2, 3-4, 5 задачи). Время работы на каждом этапе – 25 минут. Затем происходит защита выполненного решения у доски, в которой участвуют 1-3 представителя малой группы. Регламент выступления - 5 минут.

ОС-3 Самостоятельная работа

1. Найдите общее решение дифференциального уравнения.
2. Найдите решение задачи Коши.
3. Найдите решение уравнения.
4. Найдите решение уравнения.

Вариант 1

1. $x^2y'' + xy' = 1$.
2. $3y'y'' = y + y'^3 + 1$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.
3. $y^{IV} = \cos^2 x$, $y(0) = \frac{1}{32}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{1}{8}$, $y'''(0) = 0$.

Вариант 2

1. $\left(1 + x^2\right)y'' + y'^2 + 1 = 0$.
2. $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
3. $y''' = x\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.
4. $y''y^3 = 1$.

Ответы: 1. $y = (1 + C_1)^2 \ln|x + C_1| - C_1x + C_2$;

4. $y''' = y''^3$.

Ответы: 1. $y = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + C_1 \ln|x| + C_2$;

2. $x = -\frac{3}{2}(y+2)^{\frac{2}{3}}$;

3. $y = \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{32}\cos 2x$;

4. $y = \frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + C_2 x + C_3$.

2. $y = e^x$;

3. $y = x\cos x - 3\sin x + x^2 + 2x$;

4. $C_1 y^2 = 1 + (C_1 x + C_2)^2$.

Критерии и шкала оценивания

Критерий	Шкала оценивания (максимальное количество баллов)
Знает приемы решения уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка	4
Умеет классифицировать уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	6
Умеет решать уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	14
Всего	24

Рекомендации по использованию оценочного средства

Работа выполняется письменно индивидуально в два этапа по две задачи на каждом. Время работы на каждом этапе – 25-45 минут.

ОС-4 Самостоятельная работа

1. Исследуйте, являются ли функции линейно зависимыми на области определения.
2. Найдите общее решение уравнения по заданному его частному решению $y_1(x)$.
3. Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка) для которого данные функции являются частными решениями.
4. Найдите общее решение уравнения по заданному частному решению $y_1(x)$ соответствующего однородного уравнения.

Вариант 1

5. $\mathrm{sh}x$, $\mathrm{ch}x$, $2e^x$-1, $3e^x + 5$.
6. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0$, $y_1(x) = 1 + \frac{1}{x}$.
7. x, x^2, e^x.
8. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$, $y_1(x) = e^{-x}\cos x$.

Ответы:

1. да;
2. $y = C_1\left(1 + \frac{1}{x}\right) + C_2\left(\frac{x}{2} + 1 - \frac{x+1}{x}\ln|x+1|\right)$;
3. $(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$;

Вариант 2

1. $\mathrm{arctg}x$, $\mathrm{arcctg}x$, 1.
2. $y'' - 2(1 + \mathrm{tg}^2 x)y = 0$, $y_1(x) = \mathrm{tg}x$.
3. $x^2 - 3x$, $2x^2 + 9$, $2x + 3$
4. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$, $y_1(x) = e^{-2x}$.

Ответы:

2. $y = C_1\mathrm{tg}x + C_2(1 + x\mathrm{tg}x)$;
3. $(2x^2 + 6x - 9)y'' - (4x + 6)y' + 4y = 0$;

4. $y=(C_1-x)e^{-x}\cos x+(C_2+\ln\sin x)e^{-x}\sin x$
.

4. $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+\dfrac{e^{-2x}}{2x}$.

Критерии и шкала оценивания

Критерий	Шкала оценивания (максимальное количество баллов)
Знает приемы решения линейных дифференциальных уравнений высших порядков с переменными коэффициентами	4
Умеет исследовать линейную независимость системы функций	4
Умеет находить общее решение уравнения второго порядка по заданному частному решению	16
Всего	24

Рекомендации по использованию оценочного средства

Работа выполняется письменно индивидуально в два этапа по две задачи на каждом. Время работы на каждом этапе – 25-45 минут.

ОС-5 Самостоятельная работа

1. Найдите общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.
2. Найдите общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.
3. Найдите общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.
4. Найдите решение задачи Коши для линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.
5. Решите уравнение Эйлера.

Вариант 1

1. $y'''-y''-y'+y=0$.
2. $y''-9y=e^{3x}\cos x$.
3. $y''+9y=xe^{3x}+2x\sin x$.
4. $y''+y=\mathrm{tg}x$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$.
5. $x^2y''-6y=5x^3+8x^2$

Ответы:

1. $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{-x}$;
2. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+\dfrac{1}{37}e^{3x}(6\sin x-\cos x)$;
3. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\dfrac{1}{4}x\sin x-\dfrac{1}{16}\cos x+\dfrac{1}{54}(3x-1)e^{3x}$
.
4. $y=2(\cos x+\sin x)+\cos x\ln\left|\mathrm{ctg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$.
5. $y=C_1x^3+C_2x^{-2}+x^3\ln|x|-2x^2$.

Вариант 2

1. $y'''-3y''+3y'-y=0$.
2. $y''+y=4x\cos x$.
3. $y''+4y=2\sin 2x-3\cos 2x+1$
.

Ответы:

1. $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x$;
2. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\cos x+x^2\sin x$;
3. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\dfrac{x}{4}(2\cos 2x+3\sin 2x)+\dfrac{1}{4}$;

4. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

5. $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.

4. $y = \dfrac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x| + \dfrac{x}{2}\sin 2x$;

5. $y = \left(C_1 \cos\ln|x| + C_2 \sin\ln|x| + 3\right)x^2$.

Критерии и шкала оценивания

Критерий	Шкала оценивания (максимальное количество баллов)
Знает приемы решения линейных дифференциальных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами	4
Умеет решать линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами методом неопределённых коэффициентов	10
Умеет решать линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами методом подбора	10
Всего	24

Рекомендации по использованию оценочного средства

Работа выполняется письменно в малых группах по выбору студентов. Работа выполняется в три этапа (1-2, 3-4, 5 задачи). Время работы на каждом этапе – 25 минут. Затем происходит защита выполненного решения у доски, в которой участвуют 1-3 представителя малой группы. Регламент выступления - 5 минут.

ОС-6 Самостоятельная работа

1. Определите тип системы дифференциальных уравнений.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений.
3. Поясните, когда можно найти частное решение этой системы.

Вариант 1

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + 2\sin t - 3\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 4y + 7\sin t - 20\cos t. \end{cases}$$

Ответ:

$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2\sin t$,

$y = 2C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + 5\cos t$.

Вариант 2

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + y. \end{cases}$$

Ответ:

$x = e^t\left(C_1 \cos 2\sqrt{3}t + C_2 \sin 2\sqrt{3}t\right)$,

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^t\left(C_2 \cos 2\sqrt{3}t - C_1 \sin 2\sqrt{3}t\right)$.

Критерии и шкала оценивания

Критерий	Шкала оценивания (максимальное количество баллов)
Знает типологию систем дифференциальных уравнений	4

Знает алгоритм решения систем дифференциальных уравнений	4
Умеет решать нормальные системы дифференциальных уравнений	16
Всего	24

Рекомендации по использованию оценочного средства

Работа выполняется письменно индивидуально во внеаудиторное время. Задания сообщаются за 1 день до сдачи работы на проверку.

ОС-7 Самостоятельная работа

1. Докажите линейность дифференциального оператора используя определение; найдите его нули.
2. Найдите векторные линии векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$.
3. Проверьте, удовлетворяет ли скалярное поле $u(x, y)$ оператору Лапласа.
4. Найдите решение задачи, используя приём математического моделирования и терминологию теории операторов.

Вариант 1

1. $L[y] = y''' - y'' - y' + y$

2. $\vec{A}(x, y, z) = y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

Ответ: $\begin{cases} z = C_1 \cdot y, \\ x = C_2 \end{cases}$

3. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$

4. Скорость остывания воды в чайнике пропорциональна разности температуры чайника (Т) и температуры кухни (20 С°). Чайник выключился в 10.20 при температуре воды 100С°. В 10.30 температура воды в чайнике была 80 С°. Выясните, когда температура воды в чайнике будет равна 40 С°.

Вариант 2

1. $L[y] = y''' - 3y'' + 3y' - y$

2. $\vec{A}(x, y, z) = 3y \cdot \vec{i} - 2x \cdot \vec{j}$

Ответ: $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = C_1, \\ z = C_2 \end{cases}$

3. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$

4. Скорость остывания воды в чайнике пропорциональна разности температуры чайника (Т) и температуры кухни (25 С°). Чайник выключился в 10.10 при температуре воды 100С°. В 10.20 температура воды в чайнике была 80 С°. Выясните, когда температура воды в чайнике будет равна 60 С°.

Критерии и шкала оценивания

Критерий	Шкала оценивания (максимальное количество баллов)
Знает типологию теории дифференциальных операторов.	2
Знает алгоритм построения математической модели задачи с применением дифференциального оператора	3
Умеет моделировать, исследовать и интерпретировать поведение динамической системы на языке дифференциальных операторов	7
Всего	12

Рекомендации по использованию оценочного средства

Работа выполняется письменно индивидуально во внеаудиторное время. Задания сообщаются за 1 день до сдачи работы на проверку.

ОС-8 Самостоятельная работа

1. Найти мощность множества дробно-рациональных функций (с вещественными коэффициентами).

2. Найти мощность множества дважды дифференцируемых числовых функций.

3. Каких последовательностей целых чисел больше – сходящихся или расходящихся?

4. Доказать равномощность множеств [a;b] и [a;b), [a;b] и (a;b), (a;b) и R

Решение:

1. Дробно-рациональная функция $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ задается парой многочленов P, Q с вещественными коэффициентами $\Rightarrow$ множество A дробно-рациональных функций равномощно **R**[x]× **R**[x] – декартову квадрату множества многочленов с действительными коэффициентами; $\operatorname{card} R[x]=c \;\Rightarrow\; \operatorname{card} A=\operatorname{card}\mathbf{R}[x]\times\mathbf{R}[x]=c$.
2. Множество D^2 (**R**) дважды дифференцируемых функций $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ есть часть множества C(**R**) непрерывных функций $\Rightarrow \operatorname{card} D^2(\mathbf{R})\le \operatorname{card} C(\mathbf{R})=c$. Множество D^2(**R**) включает в себя множество **R**[x] многочленов с действительными коэффициентами $\Rightarrow \operatorname{card} D^2(\mathbf{R})\ge \operatorname{card}\mathbf{R}[x]=c$. Следовательно, $\operatorname{card} D^2(\mathbf{R})=c$.
3. Если последовательность целых чисел (a_n) сходится к пределу a, то по критерию Больцано-Коши $(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in N)(\forall n,m>N)|a_n-a_m|<\varepsilon$. Возьмем $\varepsilon<1$, тогда получим: $(\exists N\in N)(\forall n,m>N)|a_n-a_m|<\varepsilon<1, |a_n-a_m|\in\mathbf{Z} \;\Rightarrow\; |a_n-a_m|=0, a_n=a_m$. Итак, если последовательность целых чисел сходится, то она стационарна, начиная с некоторого номера N : $(a_1,a_2,\ldots,a_N,a,a,\ldots,a,\ldots)$. Чтобы задать произвольную последовательность такого вида, достаточно задать: номер $N\in$N; число $a\in$Z ; кортеж $(a_1,a_2,\ldots,a_N)\in\mathbf{Z}^N$. Поэтому множество A_N последовательностей целых чисел, стационарных, начиная с данного номера N, равномощно Z× Z^N, т.е. счетно. Множество сходящихся последовательностей целых чисел $A=\bigcup_{N=0}^{\infty}A_N \;\Rightarrow\; \operatorname{card} A=\aleph_0$.

   Множество S(Z) всевозможных последовательностей целых чисел имеет мощность континуума. Множество расходящихся последовательностей целых чисел $B=\mathrm{S}(\mathbf{Z})\setminus A \Rightarrow \operatorname{card} B=c$.
4. а) Выберем последовательность $a_n=a+\dfrac{b-a}{2^{n-1}}$, зададим $\varphi: a_n\to a_{n+1}, x\to x$, если $x\in[a;b]\setminus\{a_n\}$. Тогда φ – функция, $D(\varphi)=[a;b], E(\varphi)=[a;b)$, φ^{-1} – функция, т.е. φ – биекция $[a;b]\to[a;b)$. б) Выберем последовательности $a_n=a+\dfrac{b-a}{3^{n-1}}$, $b_n=b-\dfrac{b-a}{3^{n-1}}$; зададим $\varphi: a_n\to a_{n+1}, b_n\to b_{n+1}, x\to x$, если $x\in[a;b]\setminus\{a_n\}\setminus\{b_n\}$. Тогда φ – биекция $[a;b]\to(a;b)$. в) $\varphi: x\to t=\dfrac{\pi}{b-a}x-\dfrac{\pi}{2}\to y=\operatorname{tg} t$ – биекция $(a;b)\to\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$, т.е ($a$; b) равномощен (–∞;∞); отсюда и из б) следует, что [a; b] равномощен (–∞;∞).

Критерии и шкала оценивания

Критерий	Шкала оценивания (максимальное количество баллов)
Знает определения понятия мощности множества	4
Умеет определять мощность множеств, устанавливая взаимно однозначное соответствие между множествами	12
Умеет доказывать утверждение о мощности множества с применением теорем	8
Всего	24

Рекомендации по использованию оценочного средства

Контрольная работа выполняется письменно в малых группах по выбору студентов. Каждая группа решает одно задание. Время работы - 25 минут.

ОС-9 Самостоятельная работа

1. Является ли точка $x=(1;2;3;0;\ldots;0;\ldots)$ для множества $A=\{y=(y_1;y_2;y_3;0;0;\ldots;0;\ldots)|y_1;y_2;y_3\in R\}$ в метрическом пространстве m
   а) внутренней точкой?
   б) точкой прикосновения?
   в) предельной точкой?
   г) изолированной точкой?
   д) граничной точкой?
   Ответы обосновать.
2. Найти внутренность, замыкание, производное множество, множество изолированных точек, границу множества $A=[0;1/2)\cup(1/2;1]$ в метрическом пространстве:
   а) $(R,\rho),\quad \rho(x,y)=|x-y|$;
   б) $([0;1],\rho),\quad \rho(x,y)=|x-y|$.
   В каждом случае указать, является ли множество A открытым, замкнутым, совершенным, всюду плотным в соответствующем пространстве.
3. Найти внутренность, замыкание, производное множество, множество изолированных точек, границу множества $A=\{(x_1;x_2)\in R^2|\, x_1\in Q, x_2\le 1\}$ в метрическом пространстве (R^2,ρ_2). Является ли множество A открытым, замкнутым, совершенным, всюду плотным в этом пространстве?
4. Доказать, что для любой непрерывной функции $f:R\to R$ множество $E_0=\{x\in D(f)|\, f(x)\ge 0\}$ замкнуто.

Критерии и шкала оценивания

Критерий	Шкала оценивания (максимальное количество баллов)

Знает основные определения, связанные с описанием структуры множеств	8
Умеет доказывать некоторые основные положения, связанные с описанием структуры заданного множества	16
Всего	24

Рекомендации по использованию оценочного средства

Самостоятельная работа выполняется письменно в малых группах по выбору преподавателя. Каждая группа решает одно задание. Время решения - 25 минут. Затем происходит защита выполненного решения у доски, в которой участвуют 1-3 представителя малой группы. Регламент выступления - 5 минут.

ОС-10 Тест

Множество	**R** вещественных чисел x, y	$\mathbf{R}^2$ двумерных векторов $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$	$S_{\text{огр}}(\mathbf{R})$ **ограниченных** последовательностей действительных чисел $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots)$	$F([a;b],\mathbf{R})$ всевозможных функций $x(t):[a;b]\to R$, $y(t):[a;b]\to R$	***M*** всевозможных «слов» x, y в латинском алфавите
Функция $\rho(x,y)=\ldots$	$arctg\lvert x-y\rvert$	$\sin^2(x_1-y_1)+$ $+\cos^2(x_2-y_2)$	$\max\limits_{i\in N}\lvert x_i-y_i\rvert$	$\sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2 dt}$	Количество несовпадающих символов, стоящих в x, y на одинаковых местах
Заключение:					
Функция ρ является метрикой на данном множестве					
Функция ρ не задает метрику на данном множестве, так как определена не для всех пар (x, y)					
Функция ρ не задает					

метрику на данном множестве, так как не является неотрицательной					
Функция ρ не задает метрику на данном множестве, так как не является невырожденной					
Функция ρ не задает метрику на данном множестве, так как не обладает свойством симметрии					
Функция ρ не задает метрику на данном множестве, так как не удовлетворяет неравенству треугольника					

Критерии и шкала оценивания

Критерий	Шкала оценивания (максимальное количество баллов)
Знает основные классические примеры метрических пространств	12
Умеет конструировать примеры метрик на заданном множестве	24
Умеет приводить примеры функций, не являющихся метриками по указанной причине	36
Всего	72

Рекомендации по использованию оценочного средства

Тест выполняется письменно индивидуально. Время работы - 2 академически часа.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-11 Итоговая контрольная работа / реферат

Примерное содержание итоговой контрольной работы

Часть 1

1. Докажите, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $F(x, y, y') = 0$.
2. Определите тип дифференциального уравнения первого порядка и решите его (уравнение с разделяющимися переменными, однородное дифференциальное уравнение, уравнение в полных дифференциалах; линейное уравнение, уравнение Бернулли).
3. Найдите общий интеграл уравнения. Постройте интегральные кривые. Найдите частный интеграл по заданному начальному условию.
4. По данным условия задачи составьте дифференциальное уравнение и решите его. Сделайте рисунок.
5. Найдите общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка. Найдите решение задачи Коши по заданным начальным условиям.
6. Исследуйте, являются ли функции линейно зависимыми на области определения.

Часть 2

7. Найдите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка по заданному его частному решению $y_1(x)$.
8. Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка) для которого данные функции являются частными решениями.
9. Найдите общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами по заданному частному решению $y_1(x)$ соответствующего однородного уравнения.
10. Найдите общее решение линейного однородного / неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.
11. Найдите решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.
12. Найдите общее / частное решение системы дифференциальных уравнений.
13. Представьте уравнение в операторном виде и дайте его характеристику.
14. Найдите решение дифференциального уравнения, используя операторный метод.

Часть 3

15. Найти мощность заданного множества, например, множества периодических числовых функций (или сравнить мощности заданных множеств, например, множества гладких кривых на плоскости и множества ломаных на плоскости). Ответ обосновать.
16. Выяснить, является ли заданная функция метрикой на заданном множестве (или является ли заданная функция нормой на заданном множестве). В случае положительного ответа найти расстояние между данными точками (норму данного вектора).
17. Выяснить, является ли данный оператор линейным; непрерывным; ограниченным; сжимающим на указанном пространстве. *Найти норму оператора, если он

ограничен. *Найти неподвижную точку оператора с заданной точностью, если он является сжимающим.

18. Выяснить, является ли заданное множество подпространством данного гильбертова пространства (или найти замкнутую линейную оболочку данного множества векторов в данном гильбертовом пространстве, или найти ортогональное дополнение данного множества векторов в данном гильбертовом пространстве). Найти проекцию заданного вектора на указанное подпространство.
19. Доказать неравенство (с использованием неравенства Коши-Буняковского, например: …)
20. Выяснить, принадлежит ли заданная функция указанному пространству (функций, суммируемых по Лебегу, или функций, суммируемых с квадратом по Лебегу). В случае положительного ответа указать ее норму.
21. Верно ли заданное утверждение (например: Пересечение конечного семейства замкнутых множеств в произвольном метрическом пространстве замкнуто)? Ответ обосновать (ссылкой на изученную теорему или контрпримером).

Критерии и шкала оценивания

№ п/п	Критерий	Максимальное количество баллов
1.	Правильность решения	32
2.	Полнота комментирования решения	12
3.	Интерпретация результатов	8
4.	Использование математической символики	4
5.	Оформление графической информации	4
6.	Своевременная выполнения работы	4
	Всего:	64

Рекомендации по использованию оценочного средства

Контрольная работа выполняется в письменной форме во внеаудиторное время в течение семестра.

Примерный перечень тем рефератов

1. Схема Пикара решения задачи Коши.
2. Метод Эйлера приближенного решения уравнения $y' = f(x, y)$.
3. Однородные функции и однородные уравнения (формула Эйлера для однородных функций).
4. Уравнения в полных дифференциалах и интегрирующий множитель.
5. Семья Бернулли и дифференциальные уравнения.
6. Уравнения Риккати.
7. Уравнения, не разрешенные относительно производной: уравнения Клеро и Лагранжа.
8. Решение дифференциальных уравнений при помощи рядов.
9. Кривые, связанные с движением точки или тела на плоскости/в пространстве (экспоненциальная кривая, парабола Нейля, цепная линия, трактриса).
10. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений.

11. Применение теоремы Банаха о сжимающем отображении к решению дифференциальных уравнений и их систем.
12. Дифференциальные уравнения как средство изучения колебательных явлений.
13. Приложения дифференциальных уравнений в задачах естествознания (задача о кривой наискорейшего спуска, задача о провисании цепной линии, модель Вольтерра «хищник-жертва»).
14. Линейные дифференциальные операторы и их приложения.
15. Элементы векторной теории поля.
16. Геометрические характеристики физических полей.
17. Аксиоматическая теория множеств: аксиоматика Цермело-Френкеля.
18. Аксиоматическая теория множеств: аксиоматика фон Неймана.
19. Аксиома выбора и её роль в математике.
20. Парадоксы теории множеств и их разрешение в аксиоматической теории.
21. История проблемы континуума.
22. От Кантора до Гёделя: проблемы оснований математики.
23. Основные топологические структуры.
24. Основы геометрии гильбертовых пространств.
25. Метрические пространства и кластерный анализ.
26. Метрические пространства и теория передачи сигналов.
27. Различные способы введения интеграла Лебега.
28. Предельный переход под знаком интеграла.
29. Интегрирование и дифференцирование.
30. Непрерывность и абсолютная непрерывность функций.
31. Пространства суммируемых функций и их свойства.

Критерии и шкала оценивания

№ п/п	Критерий	Максимальное количество баллов
1.	Полнота изложения материала	28
2.	Доказательность и непротиворечивость изложения материала	6
3.	Формулировка целей, задач и результатов исследования	6
4.	Структурирование материала	6
5.	Пропорциональность теоретического и практического материала	2
6.	Разнообразие источников информации	2
7.	Оформление текстовой и графической информации, формул	2
8.	Оформление источников информации	2
9.	Стиль изложения	2
10.	Стиль оформления	2
11.	Практикоориентированность исследования	2
12.	Своевременность выполнения работы	4
	Всего:	64

Рекомендации по использованию оценочного средства

Тематика рефератов определяется на первых практических занятиях, выбор темы осуществляется студентом самостоятельно. Реферат выполняется индивидуально во внеаудиторное время в течение семестра, представляется в печатном виде (за неделю до установленного срока). Защита реферата происходит в форме публичного выступления на контрольном практическом занятии, дата устанавливается заранее (не позднее, чем за месяц до выступления). Доклад сопровождается электронной презентацией. Рекомендуются предварительные промежуточные консультирования с преподавателем.

ОС-12 Экзамен в форме устного собеседования

Программа экзамена

Раздел 1. Основные понятия

1 Основные понятия теории дифференциальных уравнений (дифференциальное уравнение, обыкновенное дифференциальное уравнение, уравнение в частных производных; порядок дифференциального уравнения; решение дифференциального уравнения, общее и частное решение дифференциального уравнения, особое решение дифференциального уравнения; общий и частный интеграл дифференциального уравнения; интегральная кривая, поле направлений).

2 Начальное условие дифференциального уравнения. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего заданному начальному условию.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

3 Уравнения с разделенными переменными.

4 Уравнения с разделяющимися переменными.

5 Однородные функции и однородные уравнения.

6 Уравнения в полных дифференциалах.

7 Линейные уравнения. Метод вариации произвольной постоянной.

8 Линейные уравнения. Метод Бернулли.

9 Уравнения Бернулли.

Раздел 3. Дифференциальные уравнения высших порядков

10 Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка. Общее и частное решение дифференциального уравнения n-го порядка.

11 Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

12 Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка: $y^{(n)} = f(x)$.

13 Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка: $F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$.

14 Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка: $F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$.

15 Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка: $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$.

16 Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка: $F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$.

Раздел 4. Линейные дифференциальные уравнения

17 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Теорема о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка.
18 Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Свойства решений. Линейная независимость решений. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.
19 Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства решений. Линейная независимость решений. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.
20 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка. Структура общего решения. Метод вариации произвольных постоянных.
21 Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Структура общего решения.
22 Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Структура общего решения.
23 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения.
24 Свободные и вынужденные колебания. Резонанс.

Раздел 5. Системы дифференциальных уравнений

25 Системы дифференциальных уравнений. Нормальная форма системы.
26 Системы линейных уравнений.
27 Метод исключения неизвестных.
28 Метод интегрируемых комбинаций.

Раздел 6. Элементы теории множеств

29 Мощность конечных множеств и результатов операций над ними.
30 Мощность счетных множеств и результатов операций над ними.
31 Мощность континуальных множеств и результатов операций над ними.
32 Множества мощности гиперконтинуум. Бесконечность шкалы мощностей.
33 Теоремы о сравнении мощностей.

Раздел 7. Начала функционального анализа

34 Понятие метрического пространства. Примеры. Сходимость в метрических пространствах.
35 Строение точечных множеств метрических пространств.
36 Строение открытых, замкнутых, совершенных множеств в пространстве действительных чисел.
37 Полные метрические пространства. Пополнение метрического пространства. Примеры.
38 Компактные метрические пространства.
39 Связные метрические пространства.
40 Непрерывные отображения метрических пространств.
41 Сжимающие отображения метрических пространств. Принцип сжимающих отображений (теорема Банаха).
42 Понятие нормированного пространства. Метрика в нормированном пространстве. Банаховы пространства. Примеры.
43 Линейная оболочка и замкнутая линейная оболочка множества в нормированном пространстве. Линейные многообразия, подпространства. Примеры.
44 Понятие пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского.

45 Норма и метрика в пространстве со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Примеры.
46 Ортогональные векторы в гильбертовом пространстве, ортогональное дополнение множества, проекция на подпространство и расстояние до подпространства.
47 Теорема Пифагора. Ряд Фурье по ортогональной системе векторов. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
48 Ортогональные и ортонормированные базисы в гильбертовом пространстве. Изоморфизм счетномерных гильбертовых пространств.

Критерии и шкала оценивания

№ п/п	Вид деятельности	Максимальное количество баллов
Теоретическая часть экзаменационного билета (по каждому из двух вопросов)		
1.	Формулировка определений по вопросу билета; запись с помощью математической символики	4
2.	Сопровождение понятий, определений иллюстрирующими примерами	4
3.	Формулировка теорем (свойств рассматриваемого объекта) или алгоритма решения класса задач	4
4.	Доказательство теорем, свойств, обоснование алгоритмов	8
5.	Ответы на уточняющие или дополнительные вопросы	4
Всего		24
Практическая часть экзаменационного билета (по каждой из двух задач)		
6.	Понимание постановки задачи	4
7.	Знание определений, формул, правил, необходимых для решения задачи	4
8.	Поэтапное решение задачи	8
9.	Комментирование выполненного решения	4
10.	Формулировка результата решения задачи	4
Всего		24
	Итого	96

Рекомендации по использованию оценочного средства

Список вопросов к экзамену выдаётся на первых лекциях занятиях. Подготовка к экзамену происходит индивидуально во внеаудиторное время в течение семестра. Экзамен происходит в форме публичного индивидуального собеседования, дата устанавливается заранее (не позднее, чем за месяц до выступления). Допускается использование печатных справочных материалов (таблиц значений критериев) и индивидуально приготовленных рукописных справочников основных формул. Рекомендуются предварительные промежуточные консультирования с преподавателем.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования баллов, набранных в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекции	Посещение практического занятия	Работа на практическом занятии	Контрольная работа	Экзамен
5 семестр	Максимальное количество баллов (за 1 занятие)	1	1	12	64	96
	Количество занятий	15	25	25	1	1
	Максимальная сумма баллов	15	25	300	64	96
	Итоговая сумма баллов	500				

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Результат	Баллы (5 ЗЕ)
«отлично»	451-500 баллов
«хорошо»	351-450 баллов
«удовлетворительно»	251-350 баллов
«неудовлетворительно»	0-250 баллов

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений,

возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

Занятие 1-2. Основные понятия теории ОДУ

Материал для освоения

1. Общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной.
3. Задача Коши для уравнения 1-го порядка, разрешенного относительно производной.
4. Особые решения уравнения.
5. Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме.
6. Геометрическая интерпретация основных понятий: поле направлений, интегральные кривые, огибающая семейства кривых.

Занятие 3-5. Дифференциальные уравнения первого порядка

Материал для освоения

1. Уравнения с разделяющимися переменными.
2. Однородные уравнения.
3. Уравнения в полных дифференциалах.
4. Интегрирующий множитель дифференциального уравнения.
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка: метод вариации произвольной постоянной; метод Бернулли; структура общего решения.
6. Уравнения Бернулли.
7. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Занятие 6-7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Материал для освоения

1. Дифференциальные уравнения высших порядков, разрешенные относительно старшей производной.
2. Задача Коши для уравнения, разрешенного относительно старшей производной.
3. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.
4. Уравнения вида $F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$.
5. Уравнения вида $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$.
6. Уравнения вида $F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$.

Занятие 8-9. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Материал для освоения

1. Линейное дифференциальное уравнение.
2. Однородные и неоднородные линейные уравнения.

3 Свойства решений линейных уравнений.
4 Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения. Определитель Вронского.
5 Структура общего решения однородного и неоднородного уравнения.
6 Решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов и методом вариации произвольных постоянных.

Занятие 10-11. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Материал для освоения

1 Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
2 Характеристический многочлен.
3 Действительные корни (простые, кратные).
4 Комплексные корни (простые, кратные).
5 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами.
6 Применение линейных дифференциальных уравнений к изучению свободных и вынужденных колебаний**.**

Занятие 12-13. Системы дифференциальных уравнений.

Материал для освоения

1 Системы дифференциальных уравнений.
2 Нормальная форма системы дифференциальных уравнений.
3 Задача Коши для нормальной системы уравнений.
4 Решение систем методом исключения.
5 Решение систем методом интегрируемых комбинаций.

Занятие 14-15. Конечные и счетные множества.

Материал для освоения

1. Конечные и бесконечные множества. Мощность множества.
2. Отношение равномощности множеств.
3. Доказательство равномощности множеств.
4. Счетные множества.
5. Доказательство счетности множества целых и рациональных чисел.

Занятие 16-17. Множества мощности континуум и гиперконтинуум.

Материал для освоения

1. Множества мощности континуум.
2. Сравнение мощностей.
3. Булеан множества и его мощность
4. Примеры множеств мощности гиперконтинуум.

Занятие 18-19. Метрические пространства.

Материал для освоения

1. Метрика.
2. Метрические пространства.
3. Предел последовательности точек метрического пространства.
4. Структура множества в метрическом пространстве.
5. Полные метрические пространства.

Занятие 20-21. Отображения метрических пространств

Материал для освоения

1. Непрерывные отображения метрических пространств.
2. Линейные отображения (линейные операторы).
3. Сжимающие отображения метрических пространств.
4. Теорема Банаха (принцип сжимающих отображений).

Занятие 22. Нормированные пространства.

Материал для освоения

1. Нормированные пространства.
2. Норма и метрика нормированного пространства.
3. Банаховы пространства.
4. Линейные оболочки.

Занятие 23-24. Пространства со скалярным произведением.

Материал для освоения

1. Пространства со скалярным произведением.
2. Неравенство Коши-Буняковского.
3. Решение задач школьной математики с применением неравенства Коши-Буняковского.
4. Гильбертовы пространства.

Занятие 25. Итоговая контрольная работа.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Жукова, Г. С. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах : учебное пособие / Г. С. Жукова. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 348 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-015971-3. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1072182 – Режим доступа: по подписке.
2. Крепкогорский, В. Л. Функциональный анализ : учебное пособие / В. Л. Крепкогорский ; Министерство образования и науки России, Казанский национальный исследовательский технологический университет. – Казань : Казанский научно-исследовательский технологический университет (КНИТУ), 2014. – 116 с. : табл., граф., ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428727 – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-7882-1650-8. – Текст : электронный.
3. Треногин, В. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / В. А. Треногин. – Москва : Физматлит, 2009. – 312 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82614 – ISBN 978-5-9221-1063-1. – Текст : электронный.

Дополнительная литература

1. Пантелеева, А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс : учебное пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова, К. А. Рыбаков. - Москва : 2020. - 384 с. - (Новая университетская библиотека). - ISBN 978-5-98704-465-0. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1213064 – Режим доступа: по подписке.

2. Треногин, В. А. Функциональный анализ : учебник / В. А. Треногин. – 3-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2002. – 488 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=8261. – ISBN 5-9221-0272-9. – Текст : электронный.
3. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : учебник : [16+] / Л. Э. Эльсгольц. – Москва : б.и., 1969. – 425 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455165