Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____ С.Н. Титов
«_25_» _июня_____ 20_21_ г

ГЕОМЕТРИЯ

Программа учебной дисциплины Предметно-методического модуля

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.01 Педагогическое образование,

направленность (профиль) образовательной программы
Математика

(заочная форма обучения)

Составители: Гришина С.А., к.ф-м.н., доцент кафедры высшей математики;
Череватенко О.И., к.ф-м.н., доцент кафедры высшей математики.

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 21.06.2021 №7

Ульяновск, 2021

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01D77C644FC1E54000000006381D0002
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 19.07.2021 до 19.07.2022

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Геометрия» относится к дисциплинам обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) Предметно-методического модуля учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Математика», заочной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках курса «Основы математической обработки информации», «Алгебра и теория чисел», школьного курса математики.

Результаты изучения дисциплины являются теоретической и методологической основой для изучения дисциплин: «Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных», «Избранные вопросы алгебры и геометрии», для прохождения практик «Учебная (Технологическая) Практикум по построению изображений», «Учебная (научно-исследовательская работа, получение первичных навыков научно-исследовательской работы) Курсовая работа № 1», «Производственная (педагогическая) преподавательская практика по математике» и итоговой аттестации.

1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целями освоения дисциплины «Геометрия» являются

- раскрытие значение геометрии, углубление представления о месте геометрии в изучении окружающего мира;
- изучение основных разделов геометрии и воспитание общей геометрической культуры, необходимой будущему учителю для понимания как основного курса математики, так и школьных факультативных курсов;
- способствовать развитию пространственного мышления.

Задачей освоения дисциплины является развитие умения самостоятельной работы с математической литературой, курс «Геометрия» должен дать студентам знания, навыки и умения, необходимые для успешного изучения других разделов математики

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Геометрия» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
ПК-11 Способен использовать теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в предметной области (в соответствии с профилем и уровнем			

обучения) и в области образования ПК-11.1. Знает основные научные понятия и особенности их использования, методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основы организации исследовательской деятельности; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; интерпретирует явления и процессы в контексте общей динамики и периодизации исторического развития предмета, с учетом возможности их использования в ходе постановки и решения исследовательских задач.	ОР-1 Знает основные фундаментальные понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области.		
ПК-13. Способен соотносить основные этапы развития предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) с ее актуальными задачами, методами и концептуальными подходами, тенденциями и перспективами ее современного развития. ПК-13.1. Знает основные этапы исторического развития предметной области.	ОР-3 Знает основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов		

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час	Практические занятия, час	Лабораторные занятия, час	Самостоят. работа, час	
	Трудоемк.						
	Зач. ед.	Часы					
4	3	108	4	10	-	85	экзамен
5	3	108	4	10	-	85	экзамен
6	3	108	4	10	-	85	экзамен
7	3	108	4	10	-	85	экзамен
Итого:	12	432	16	40	-	340	

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1.Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятель-ная работа
4 семестр				
Векторы и операции над ними. Метод координат на плоскости	2	8	-	42
Линии второго порядка	2	2	-	43
Итого по 4 семестру	**4**	**10**	**-**	**85**
5 семестр				
Метод координат в пространстве. Плоскости и прямые в пространстве.	2	8	-	28
Поверхности второго порядка	1	1		28

Аффинные и евклидовы n-мерные пространства. Квадратичные формы и квадрики	1	1		29
Итого по 5 семестру	**4**	**10**	**-**	**85**
6 семестр				
Элементы конструктивной геометрии	2	6	-	42
Проективная геометрия. Понятие проективного пространства. Основные факты проективной геометрии	2	4		43
Итого по 6 семестру	**4**	**10**	**-**	**85**
7 семестр				
Основания геометрии. Общие вопросы аксиоматики. Обоснование евклидовой геометрии по Вейлю. Измерение скалярных величин	4			43
Задачи по планиметрии		10		42
Итого по 7 семестру	**4**	**10**	**-**	**85**
Всего по дисциплине:	**16**	**40**	**-**	**340**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Краткое содержание курса (4 семестр)

I. ВЕКТОРЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ.

Скалярные и векторные величины в математике. Вектор. Длина и направление вектора. Коллинеарные и компланарные векторы. Равные векторы Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Координаты вектора относительно данного базиса и их свойства. Аксиомы векторного пространства Примеры векторных пространств. Скалярное произведение векторов и его свойства. Применение векторов к решению задач школьного курса геометрии.

Аффинная система координат на плоскости. Деление отрезка в данном отношении. Простое отношение трех точек прямой.

Прямоугольная декартова система координат. Расстояние между двумя точками.

Полярные координаты Переход от полярных координат к декартовым и обратно.

Преобразование аффинной системы координат. Левые и правые системы координат. Ориентация плоскости. Преобразование прямоугольной декартовой системы координат.

Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами. Примеры. Алгебраическая линия и ее порядок.

Прямая линия. Различные способы задания прямой. Общее уравнение прямой. Геометрический смысл коэффициентов при текущих координатах в общем уравнении прямой. Геометрический смысл знака трехчленаAx+By+C.

Взаимное расположение двух прямых. Признаки параллельности и перпендикулярности двух прямых Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми. Метод координат в решении задач школьного курса геометрии.

II. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Эллипс: определение, каноническое уравнение, свойства Гипербола: определение, каноническое уравнение, свойства. Асимптоты. Парабола: определение, каноническое

уравнение, свойства Фокусы и директрисы линий второго порядка Общее уравнение линии второго порядка. Классификация линий второго порядка.

Краткое содержание курса (5 семестр)

I. МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Аффинная система координат в пространстве. Деление отрезка в данном отношении.
Прямоугольная декартова система координат. Расстояние между двумя точками.
Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами. Примеры.
Векторное и смешанное произведение векторов. Вычисление площади треугольника и объема тетраэдра Условия коллинеарности двух векторов, компланарности трех векторов.
Различные способы задания плоскости. Общее уравнение плоскости. Геометрический смысл коэффициентов при текущих координатах в общем уравнении. Геометрический смысл знака многочленаAx+By+Cz+-Д. Взаимное расположение двух, трех плоскостей. Признаки параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями.
Различные способы задания прямой. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между двумя прямыми, угол между прямой и плоскостью. Связка прямых и плоскостей.

II. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды Определения, канонические уравнения, свойства. Цилиндр и конус второго порядка Конические сечения.

III. АФФИННЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ N-МЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И КВАДРИКИ

Аксиомы Вейля n-мерного аффинного вещественного пространства Аффинная система координат. Аффинные преобразования. Предмет аффинной геометрии.
Аксиомы n-мерного евклидова пространства Расстояние между двумя точками, угол между векторами. Ортогональность. Ортонормированные системы координат. Движения, группа движений. Предмет евклидовой геометрии.Преобразование подобия. Группа подобий. Групповой подход к геометрии.
Квадратичные формы Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции.
Квадрики в аффинном пространстве. Классификация квадрик. Квадрики в трехмерном евклидовом пространстве.

Краткое содержание курса (6 семестр)

I. ЭЛЕМЕНТЫ КОНСТРУКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аксиоматика конструктивной геометрии. Основные построения и основные задачи. Методы решения задач на построение.

II. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ПОНЯТИЕ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА. ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Модели проективной плоскости и проективного пространства. Аксиомы проективной плоскости. Проективные координаты. Уравнение прямой на проективной плоскости. Принцип двойственности. Формы первой ступени. Теорема Дезарга. Проективные преобразования. Группа проективных преобразований. Предмет проективной геометрии.

Двойное (сложное) отношение и его инвариантность при проективных преобразованиях Гармоническая четверка точек. Построение четвертой гармонической. Проективные соответствия в формах первой ступени.
Линии второго порядка на проективной плоскости. Канонические уравнения линий второго порядка в проективных координатах Проективная классификация линий второго порядка. Полюс и поляра Понятие о полярном соответствии.
Геометрия на проективной плоскости с фиксированной прямой. Евклидова геометрия с проективной точки зрения.

Краткое содержание курса (7 семестр)

I. ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АКСИОМАТИКИ. ОБОСНОВАНИЕ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ПО ВЕЙЛЮ. ИЗМЕРЕНИЕ СКАЛЯРНЫХ ВЕЛИЧИН
Понятие об аксиоматическом методе. Понятие об интерпретации (модели) системы аксиом. Непротиворечивость, независимость и полнота системы аксиом проективной геометрии.
Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Критика системы Евклида. Пятый постулат.
Предложения, эквивалентные пятому постулату.
Предшественники и творцы неевклидовой геометрии (Саккери, Ламберт, Лежандр, Гаусс, Больяи, Н И. Лобачевский).
Аксиома Лобачевского. Основные факты геометрии Лобачевского. Система аксиом Гильберта (обзор).
Непротиворечивость и полнота системы аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства. Определение прямых, плоскостей, лучей, отрезков, углов. Примеры доказательств некоторых теорем.
Аксиоматика школьного курса геометрии.
Длина отрезка, аксиомы. Теорема существования и единственности. Площадь многоугольника, аксиомы. Теорема существования и единственности. Равновеликость и равносоставленность. Теория объемов (обзор).

II. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ
Линии и замечательные точки в треугольнике. Окружности. Метод вспомогательного элемента в решении задач.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы

с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным выступлениям по материалам лекций, самостоятельных докладов, презентаций;
- подготовки тестов по вопросам программы
- домашних заданий для самостоятельного решения.

ОС-1 Контрольная работа №1 (4 семестр)

1. Даны вершины четырехугольника А(5,2), В(1,-3), С(-2,1), Д(2,6).

а) Доказать, что АВСД параллелограмм,

б) найти величину угла А,

в) Найти скалярное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{BД}$.

2. На сторонах АВ, ВС и АД квадрата АВСД выбраны соответственно точки М, Р и К так, что М - середина АВ, РС=2ВР, КА=2ДК. Найти угол между прямыми МС и РК.

3. Доказать, что прямая, проходящая через вершину А треугольника АВС и середину медианы ВД, делит сторону ВС в отношении l:2.

ОС-2 Самостоятельная работа №1(4 семестр)

1. Дан квадрат АВСД. На сторонах ВС и СД выбраны соответственно точки М и Р так, что ВМ = $\frac{1}{2}$ АВ и ДР = $\frac{1}{3}$ АВ. Найти величину угла МАР.
2. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см. и высотой 8 см проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника.
3. В ромбе АВСД точки М и Р - середины сторон ВС и СД. Найти угол МАР, если угол ВАД = 60°.
4. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник АВС (угол С = 90°). Построены медиана AA_1 и отрезок CC_1 ($C_1 \in$ АВ), перпендикулярный медиане AA_1. Найти отношение $BC_1 : C_1A$.

ОС-1 Контрольная работа №2(5 семестр)

1. Написать уравнение плоскости:

а) проходящей через точку А(-3,1,-2) и ось Оу ;

б) параллельной оси Ох и проходящей через точки В(4,0,-2) и С(-1,0,1);

в) проходящей через точку M(2,-1,5) перпендикулярно плоскостям 3x-2y+z +7=0 и 5x-4y+3z + 1=0.

2. Найти параметрические уравнения следующих прямых:

а) $\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 3y+5z-5=0 \end{cases}$;

б) прямой AB, где A(2, 2, -5), B = (Oz) $\cap$ π, π: 3x – 8y + z – 2 = 0.

3. а) При каких значениях a_1 и C прямая $\frac{x-2}{a_1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна плоскости 3x - 2y + Cz + 1 = 0?

б) Проверить, что прямые $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4}$ x и $\frac{x-8}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-2}$ пересекаются и написать уравнение плоскости, их содержащей.

4. Найти множество точек пространства, равноудаленных от двух данных плоскостей 4x – y – 2z - 3=0 , 4x – y – 2z - 5=0.

5. На оси Oz найти такую точку M, что расстояние ее от прямой $\begin{cases} 2x+3y-7z=0 \\ 2x+3y-6=0 \end{cases}$ равно 3.

ОС-1 Контрольная работа№3(6 семестр)

1. Основание треугольника равно 20 см, медианы боковых сторон равны 18 см и 24 см. Найдите площадь треугольника.
2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CH и AK. Известно, что AC = 2, площадь круга, описанного около треугольника HBK, равна $\frac{\pi}{3}$. Найдите угол между высотой и стороной BC.
3. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла ACB; DM и DP являются соответственно высотами треугольников ADC и BDC. AM = 4, BP = 9. Найдите AC и периметр треугольника ACD.

ОС-2 Самостоятельная работа№2 (6 семестр)

1. Определить фигуры, двойственные трехвершиннику по большому и малому принципам двойственности.
2. Доказать теорему, двойственную по большому принципу двойственности теореме: через всякую прямую проходят по крайней мере две плоскости.
3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Построены отрезки MN и AN. Выполнить двойственное построение.
4. Сформулировать теорему, двойственную обратной теореме Дезарга в пространстве, и доказать ее.

ОС-1 Контрольная работа№4 (7 семестр)

1. Построить отрезок, равный данному.

2. По данным отрезка a, в и c постройте отрезок, длина которого выражается следующей формулой: 1) $x = \sqrt{a b + a c^2 / b}$; 2) $x = \sqrt{c \cdot a^2 + 2 b^2 / a + b}$;

3) $x = \sqrt{a c / b \sqrt{2 a^2 + c^2}}$.

3. ГМТП, из которых заданный отрезок виден под прямым углом, => окружность, построенная на отрезке AB, как на диаметре.

ОС-2. Самостоятельная работа №3 (7 семестр)

Данный эллипс представляет параллельную проекцию окружности. Постройте проекции правильных треугольника, четырехугольника и шестиугольника, вписанных в окружность, приняв произвольно выбранную точку эллипса за одну из вершин многоугольника.

2. Треугольник АВС служит изображением равнобедренного треугольника $A_1B_1C_1$ у которого $A_1C_1 = B_1C_1$ и высота равна основанию. Постройте изображение:
   1) центра описанной окружности. 2) центра вписанной окружности.
3. Построить сечение правильной пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки М и Р на боковых ребрах призмы, не принадлежащие одной грани, и точку К на боковой грани, не содержащей указанных ребер.
4. Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, заданной следом, не пересекающим основания призмы и точкой, лежащей в плоскости верхнего основания призмы.
5. Через точку М в основании шестиугольной пирамиды ОАВСДЕН проведена плоскость, параллельная боковой грани ОАН. Построить сечение пирамиды этой плоскостью (за точку М взять центроид треугольника АВН).
6. Построить сечение пятиугольной призмы $АВСДЕА_0В_0С_0Д_0Е_0$ плоскостью, проходящей через точку М на ребре $С_0Д_0$ а параллельно прямым $С_0Е_0$ и $А_0Е_0$.
7. Через точку $М_0$ на ребре $А_0В_0$ куба $А_0В_0С_0Д_0АВСД$ провести сечение перпендикулярно диагонали $АС_0$.
8. В кубе $А_0В_0С_0Д_0АВСД$ точка М середина ребра $АА_0$, точка Р делит отрезок $ВВ_0$ в отношении 1:2 (считая от вершины В). Как выбрать точку К на ребре $СС_0$, чтобы в сечении куба плоскостью МРК получился: а) параллелограмм, б) ромб, в) прямоугольник, г) квадрат? Построить эти сечения.
9. Основанием пирамиды SABCД является квадрат, а ее ребро SA перпендикулярно плоскости основания и SA = AB. На ребрах SB и SC взяты соответственно точки K и L такие, что
   SK : SB = 1 : 4 и SL : SC = 3 : 4. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую KL перпендикулярно плоскости SBC.
10. Дан прямой круговой конус. Задайте секущую плоскость так, чтобы в сечении конуса получился: а) эллипс, б) парабола, в) гипербола и построить эти сечения

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Гришина С.А., Кувшинова А.Н., Куренева Т.Н., Череватенко О.И. Геометрия: учебно-методическое пособие. Часть 1. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. – 12 с..
2. Гришина С.А., Кувшинова А.Н., Куренева Т.Н., Череватенко О.И. Геометрия: учебно-методическое пособие. Часть 2. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. – 11 с..
3. Прокопьев Г.С., Салдаева Г.В. Методические указания и контрольная работа № 1 по теме «Геометрия на плоскости». Для студентов – заочников 1 курса физико-математического факультета.- Ульяновск, 1996. (Библиотека УлГПУ).
4. Прокопьев Г.С., Череватенко О.И. Методические рекомендации и контрольная работа № 2 по теме «Геометрия в пространстве». Для студентов – заочников 2 курса физико-математического факультета .- Ульяновск, 2010. (Библиотека УлГПУ).

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО в соответствии с принципами Болонского процесса ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но

на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	**СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,** используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	Оценочные средства для текущей аттестации ОС-1 Контрольная работа ОС-2 Самостоятельная работа	ОР-1 Знает основные фундаментальные понятия предметной области; основные методы и приёмы изучения и анализа литературы в предметной области; основные представления о методах организации и осуществления исследований в предметной области ОР-2 Знает значение терминов и понятий предметной области; основные информационные технологии поиска, сбора, анализа и обработки данных; основные методы исследования в предметной области. ОР-3 Знает основные события, хронологию развития предметной области, а также ее основных разделов
	Оценочные средства для промежуточной аттестации **зачет (экзамен)** ОС-3 Экзамен в форме устного собеседования	

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине «Геометрия».

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости

обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

ОС-3 Экзамен в форме устного собеседования

ОС-3 Вопросы к экзамену (4 семестр)

1. Понятие вектора, длина вектора, коллинеарные, равные векторы. Перенос вектора в данную точку.
2. Линейные операции над векторами, их свойства. Понятие векторного пространства.
3. Линейная зависимость вектора. Теоремы о линейной зависимости векторов.
4. Геометрический смысл линейной зависимости векторов.
5. Координаты вектора. О единственности разложения вектора по данному базису.
6. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения.
7. Применение векторов к решению задач школьного курса математики.
8. Аффинная система координат на плоскости. Простейшие задачи аналитической геометрии.
9. Прямоугольная декартова система координат на плоскости. Расстояние между двумя точками.
10. Полярная система координат на плоскости. Связь полярных и прямоугольных декартовых координат.
11. Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами. Примеры. О классификации плоских линий.
12. Прямая линия. Уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором.
13. Уравнения прямой, заданной двумя точками.
14. Общее уравнение прямой. Исследование общего уравнения прямой.
15. Геометрический смысл коэффициентов при текущих координатах в общем уравнении прямой.
16. Геометрический смысл знакм трехчлена Ах +Ву +С.
17. Взаимное расположение двух прямых.
18. Расстояние от точки до прямой.
19. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
20. Эллипс. Вывод канонического уравнения эллипса.
21. Эллипс. Свойства эллипса.
22. Гипербола. Вывод канонического уравнения гиперболы.
23. Гипербола. Свойства гиперболы.
24. Парабола. Вывод канонического уравнения параболы. Свойства параболы.
25. Директрисы эллипса и гиперболы.
26. Уравнения линий второго порядка в полярных координатах.
27. Общее уравнение линии второго порядка и приведение его к каноническому виду.
28. Классификация линий второго порядка.
29. Построение линии второго порядка по общему уравнению.

ОС-3 Вопросы к экзамену (5 семестр)

1. Аффинная и прямоугольная системы координат в пространстве.
2. Решение простейших задач в координатах.
3. Преобразование аффинной системы координат.
4. Векторное произведение векторов и его свойства.
5. Смешанное произведение векторов и его свойства.
6. Вывод уравнений плоскости при различных способах задания.

7. Общее уравнение плоскости.
8. Условие параллельности вектора и плоскости.
9. Исследование расположения плоскости относительно системы координат.
10. Геометрический смысл коэффициентов A, B, C в общем уравнении плоскости.
11. Геометрический смысл знака многочлена Ax+ By+ Cz+ D.
12. Взаимное расположение двух и трех плоскостей.
13. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями.
14. Различные способы задания прямой в пространстве.
15. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
16. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
17. Метрические задачи теории прямой и плоскости в пространстве.
18. Эллипсоид. Определение, свойства.
19. Однополостный гиперболоид. Определение, свойства.
20. Двуполостный гиперболоид. Определение, свойства.
21. Эллиптический параболоид. Определение, свойства.
22. Гиперболический параболоид. Определение, свойства.
23. Цилиндрические поверхности второго порядка.
24. Конические поверхности. Конические сечения.
25. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.
26. Поверхности вращения. Поверхности вращения второго порядка.
27. Система аксиом Вейля n- мерного аффинного пространства.
28. к- мерные плоскости.
29. Аксиомы n- мерного евклидова пространства.
30. Ортонормированные системы координат.
31. Квадратичная форма. Ее матричное представление.
32. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
33. Закон инерции квадратичных форм.
34. Понятие квадрики в аффинном пространстве. Пересечение квадрики с прямой. Асимптотические направления.
35. Центр квадрики.
36. Упрощение уравнения квадрики.
37. Аффинная классификация квадрик.

ОС-3 Вопросы к экзамену(6 семестр)

1. Перспективное соответствие между плоскостью и связкой. Особые лучи и особая плоскость связки.
2. Расширенная плоскость. Несобственные элементы.
3. Свойства проективной прямой и проективной плоскости.
4. Аксиомы проективного пространства.
5. Проективные координаты.
6. Прямая на проективной плоскости. Координаты прямой.
7. Принципы двойственности (малый и большой) формы первой ступени.
8. Теорема Дезарга.
9. Перспективные и проективные отображения в формах первой ступени. Определениепроективности по Понселе.
10. Сложное отношение 4-х элементов в формах первой ступени (рядах и пучках).
11. Инвариантность сложного отношения при проектированиях и сечениях. Определение проективности по Штейнеру.
12. Гармонические четверки элементов в формах первой ступени. Четырехвершинник и его гармонические свойства.
13. Свойства проективных отображений в формах первой ступени.
14. Построение проективного соответствия в рядах.

15. Построение проективного соответствия в пучках.
16. Теорема Штейнера.
17. Теорема Паскаля. Построение точек линии второго порядка на основе теоремы Паскаля.
18. Линии второго порядка на проективной плоскости. Пересечение линии 2-го порядка с прямой.
19. Касательная к линии второго порядка.
20. Проективная классификация линий второго порядка.
21. Полюсы и поляры теоремы о свойствах полюсов и поляр.
22. Преобразование координат. Проективные преобразования. Предмет проективной геометрии.
23. Полярное преобразование. Автополярные фигуры.
24. Понятие об аксиоматическом методе. Понятие об интерпретации (модели) системы аксиом.
25. Требования, предъявляемые к системе аксиом: непротиворечивость, независимость, полнота.
26. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Критика «Начал».
27. Проблема пятого постулата.
28. Н.И. Лобачевский и его геометрия. Аксиома Лобачевского.
29. Система аксиом Гильберта.
30. Аксиоматика Вейля евклидовой геометрии.
31. Непротиворечивость системы аксиом Вейля.
32. Полнота системы аксиом Вейля трехмерного пространства.
33. Определение прямых, лучей, отрезков, плоскостей, углов. Доказательство некоторых теорем планиметрии и стереометрии.
34. Определение длины отрезка. Теорема существования и единственности.
35. Понятие площади многоугольника. Теорема существования и единственности.
36. Равновеликость и равносоставленность многоугольников. Теорема Бояи-Гервина.
37. Теория объемов (обзор).

ОС-3 Вопросы к экзамену (7 семестр)

1. Аксиоматика конструктивной геометрии. Основные построения и основные задачи.
2. Схема решения задачи на построение. Методы решения задач на построение.
3. Основные замечательные множества точек на плоскости. Построение их циркулем и линейкой. Метод пресечения множеств.
4. Метод геометрических преобразований.
5. Алгебраический метод решения задач на построение.
6. Задачи, неразрешимые циркулем и линейкой, примеры.
7. Параллельное проектирование и его свойства.
8. Изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции.
9. Основы метода Монжа. Изображение точек, прямых и плоскостей. Решение позиционных задач.
10. Аксонометрические проекции. Теорема Польке-Шварца.
11. Полные и неполные изображения. Решение основных позиционных задач на полном изображении.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
4, 5, 6, 7 семестры	Разбалловка по видам работ	2х 1=2балла	5 х 1=5 баллов	229 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	2 балл max	7 балла max	236 баллов max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 4, 5, 6 и 7 семестров

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150 и менее

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий (4 семестр)

Занятие 1, 2.

Тема: Понятие вектора. Коллинеарные векторы. Равные векторы. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Координаты вектора в относительно данного базиса и их свойства. Скалярное произведение векторов. Векторное и смешанное произведение векторов. Применение векторов к решению задач школьного курса геометрии.

1. Понятие вектора, нулевого вектора; определения равных, коллинеарных, противоположных, компланарных векторов. Длина вектора.
2. Операция сложения векторов: определение суммы векторов; свойства операции сложения. Вычитание векторов. Умножение вектора на число: определение, свойства операции.
3. Линейная комбинация векторов. Тривиальная линейная комбинация векторов.
4. Определения линейно независимой и линейно зависимой систем векторов.
5. Определение координат вектора в базисе. Свойства координат.
6. Скалярное произведение векторов: определение, свойства (коммутативность, ассоциативность относительно умножения на число. дистрибутивность. необходимое и достаточное условия равенства нулю скалярного произведения, скалярный квадрат, вычисление через координаты векторов). Обоснование свойств.
7. Определение векторного произведения двух векторов.
8. Геометрический смысл модуля векторного произведения.
9. Формула для вычисления векторного произведения через координаты множителей.
10. Вычисление площади треугольника с помощью векторного произведения (вывод формулы площади).
11. Определение смешанного произведения трех векторов.
12. Геометрический смысл смешанного произведения (с обоснованием).
13. Формула для вычисления смешанного произведения (знать вывод).
14. Формула необходимого и достаточного условий компланарностии трех векторов.
15. Вычисление объема параллелепипеда, тетраэдра с помощью смешанного произведения (вывод формулы объема тетраэдра).

Занятие 3, 4.

Тема: Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости в аффинной и прямоугольной декартовой системах координат. Прямая линия. Различные способы задания прямой. Общее уравнение прямой. Геометрический смысл знака многочлена Ax + By + C. Параллельность и перпендикулярность двух прямых. Расстояние от точки до прямой. Метод координат в решении задач школьного курса геометрии.

1. Определение и задание аффинной системы координат на плоскости и в пространстве.
2. Радиус-вектор точки. Координаты точки.
3. Простейшие задачи, решаемые в аффинной системе координат (координаты вектора, соединяющего две точки; деление отрезка в заданном отношении).
4. Прямоугольная система координат.
5. Простейшие задачи, решаемые в прямоугольной системе координат (знать обоснования).
6. Применение метода координат к решению задач школьного курса геометрии.
7. Вывод уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором.
8. Вывод уравнения прямой, заданной двумя точками.
9. Вывод уравнения прямой, заданной точкой и перпендикулярным вектором. Нормальный вектор прямой.

10. Общее уравнение прямой.
11. Уравнение прямой «в отрезках».
12. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
13. Расположение прямой в системе координат в зависимости от равенства нулю коэффициентов в общем уравнении прямой.
14. Условия пересечения, совпадения, параллельности двух прямых (с обоснованием).
15. Геометрический смысл знака многочлена $A_x + B_y + C$.
16. Определение угла между двумя прямыми. Вывод формулы.
17. Расстояние от точки до прямой (вывод формулы).

Занятие 5.

Тема: Эллипс, гипербола, парабола. Фокусы и директрисы линий второго порядка.

Вывод уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором.

1. Определение эллипса, его свойства.
2. Определение гиперболы, ее свойства.
3. Определение параболы, ее свойства.
4. Фокусы и директрисы линий второго.

Решить задачи: [3] №.764, 756, 796(а, г), 797(а), 823, 831(а).

Планы практических занятий (5 семестр)

Занятие 1.

Тема: Применение метода координат к решению задач школьного курса стереометрии.

1. Простейшие задачи, решаемые в аффинной системе координат (координаты вектора, соединяющего две точки; деление отрезка в заданном отношении).
2. Простейшие задачи, решаемые в прямоугольной системе координат (знать обоснования).
3. Применение метода координат к решению задач школьного курса стереометрии.

Решить задачи: [3] № 1047, 1048, 1049.

Занятие 2.

Тема: Векторное и смешанное произведение векторов.

1. Определение ориентированного трехмерного пространства.
2. Определение векторного произведения двух векторов.
3. Геометрический смысл модуля векторного произведения.
4. Формула для вычисления векторного произведения через координаты множителей.
5. Свойства векторного произведения: антикоммутативность относительно скалярного множителя, дистрибутивность относительно сложения, условие коллинеарности векторов (доказательства свойств).
6. Вычисление площади треугольника с помощью векторного произведения (вывод формулы площади).
7. Определение смешанного произведения трех векторов.
8. Геометрический смысл смешанного произведения (с обоснованием).
9. Формула для вычисления смешанного произведения (знать вывод).
10. Свойства смешанного произведения с обоснованием их:
    a. инвариантность относительно циклической перестановки;
    b. изменение знака при перестановке двух множителей;

c. ассоциативность относительно скалярного множителя;
d. дистрибутивность относительно сложения.

5. Формула необходимого и достаточного условий компланарностии трех векторов (с обоснованием).
6. Вычисление объема параллелепипеда, тетраэдра с помощью смешанного произведения (вывод формулы объема тетраэдра).

Решить задачи: [3] № 1012 (а, б), 1036, 1019, 1022, 1023 (б), 1025 (б), 1031 (а), 1035.

Занятие 3.

Тема: Различные способы задания плоскости. Общее уравнение плоскости. Геометрический смысл знака многочлена Ax + By + Cz + D.

1. Вывод уравнения плоскости, заданной точкой и двумя направляющими векторами.
2. Вывод уравнения плоскости, заданной тремя точками.
3. Параметрические уравнения плоскости.
4. Вывод уравнения плоскости, заданной точкой и перепендикулярным вектором. Нормальный вектор плоскости.
5. Общее уравнение плоскости.
6. Уравнение плоскости «в отрезках».
7. Геометрический смысл коэффициентов в общем уравнении плоскости.
8. Расположение плоскости в системе координат в зависимости от равенства нулю коэффициентов в общем уравнении плоскости.
9. Геометрический смысл знака многочлена $A_x + B_y + C_z + D$.

Решить задачи: [3] № 1059 (а), 1060 (а), 1075 (а), 1065 (устно), 1066, 1079.

Занятие 4.

Тема: Различные способы задания прямой.

1. Вывод уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором.
2. Параметрические, канонические уравнения прямой.
3. Вывод уравнения прямой, заданной двумя точками.
4. Уравнение прямой, заданной двумя плоскостями. Общее уравнение прямой.
5. Переход от общего уравнения прямой к параметрическим или каноническим уравнениям.
6. Исследование взаимного расположения двух прямых. Обоснование условий, определяющих прямые скрещивающиеся. пересекающиеся, параллельные, совпадающие..

Решить задачи: [3] № 1133 (а, б, в), 1135, 1140 (а, б, в), 1141, 1143 (а).

Занятие 5.

Тема: Позиционные и метрические задачи на прямую и плоскость.

1. Как могут располагаться прямая и плоскость в пространстве, как исследовать то, если прямая и плоскость заданы уравнениями?
2. Определение угла между прямой и плоскостью. Вывод формулы для вычисления угла между прямой и плоскостью.
3. Определение угла между двумя прямыми. Вывод формулы для вычисления угла между прямыми.
4. Вывод формулы для вычисления расстояния от точки до прямой.

Решить задачи: [3] № 1136 (устно), 1144, 1146, 1149, 1150, 1157, 1161, 1165, 1168.

Планы практических занятий (6 семестр)

Занятие 1. Построения циркулем и линейкой.

1. На плоскости нарисована окружность, но центр ее не отмечен. Постройте его.

2. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.
3. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон.
4. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.
5. Проведите касательную к окружности, проходящую через данную точку вне окружности.
6. Проведите общую касательную к двум данным окружностям.
7. Дан отрезок длины a и натуральное число n. Построить отрезок длины .
8. Дан отрезок длины a и натуральные числа m и n. Построить отрезок длины m/n a.
9. Даны отрезки с длинами a, b, c. Построить отрезок, длина которого равна ab/c.
10. Даны отрезки с длинами a и b. Построить отрезок длины .
11. Дан угол. Внутри угла найти точку, находящуюся на заданных расстояниях от сторон угла.
12. Построить треугольник по стороне, опущенной на нее высоте и радиусу описанной окружности. Сколько получится треугольников?
13. В данном треугольнике провести прямую, параллельную основанию так, чтобы сумма отрезков боковых сторон, заключенных между этой прямой и основанием, была равна основанию.
14. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Провести прямую, пересекающую отрезок AC в точке X, а отрезок BC — в точке Y таким образом, что AX = XY = YB.

Занятие 2. Построение двусторонней линейкой.

1. Постройте центр данной окружности с помощью двусторонней линейки, если известно, что ширина линейки меньше диаметра окружности.
2. Даны угол AOB, прямая l и точка P на ней. С помощью одной двусторонней линейки проведите через точку P прямые, образующие с прямой l угол, равный углу AOB.
3. Даны отрезок AB, непараллельная ему прямая l и точка M на ней. С помощью одной двусторонней линейки постройте точки пересечения прямой l с окружностью радиуса AB с центром M.
4. Даны прямая l и отрезок OA, параллельный l. С помощью одной двусторонней линейки постройте точки пересечения прямой l с окружностью радиуса OA с центром O.
5. Даны отрезки O_1A_1 и O_2A_2. С помощью одной двусторонней линейки постройте радикальную ось окружностей радиуса O_1A_1 и O_2A_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно.
6. Выполните построения с помощью линейки с двумя параллельными краями (двусторонней линейки) без циркуля.
   а) Постройте биссектрису данного угла AOB.
   б) Дан острый угол AOB. Постройте угол BOC, биссектрисой которого является луч OA.
7. С помощью одной двусторонней линейки восставьте перпендикуляр к данной прямой l в данной точке A.
8. С помощью одной двусторонней линейки:
   а) через данную точку проведите прямую, параллельную данной прямой;
   б) постройте середину данного отрезка.
9. Дана линейка постоянной ширины (т.е. с параллельными краями) и без делений. Постройте биссектрису данного угла.
10. Разделите данный отрезок пополам с помощью линейки с параллельными краями и без делений.

Занятие 3. Построение линейкой с эталоном длины.

1. Соединить две точки прямою и найти точку пересечения двух прямых в случае, если эти прямые непараллельны.
2. Отложить данный отрезок на данной прямой от некоторой точки.
3. Данный угол отложить при данной прямой или построить прямую, пересекающую данную прямую под данным углом.
4. Через данную точку провести параллельную к данной прямой .
5. К данной прямой провести перпендикуляр.

Занятие 4. Параллельное проектирование. Изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции.

Цель: Основные факты параллельной геометрии; изображение плоских и пространственных фигур в параллельной проекции.

1. Постройте параллельную проекцию равностороннего треугольника. В нем изобразите:
   а) среднюю линию;
   б) радиус вписанной окружности;
   в) радиус описанной окружности.

2. Дано изображение ромба. Найдите изображение его высоты, если острый угол ромба равен 60°.

3. Дано изображение треугольника и двух его высот. Постройте изображение центра окружности, описанной около данного треугольника.

4. Дано изображение равнобедренного треугольника, в котором боковая сторона в два раза больше его основания. Постройте изображения всех его замечательных точек.

5. Постройте параллельную проекцию фигуры, являющуюся объединением квадрата и равностороннего треугольника, имеющих общую сторону.

6. Постройте изображение окружности с заданным радиусом.

Домашнее задание.
1. Постройте параллельную проекцию квадрата. В нем изобразите:
   а) радиус вписанной окружности;
   б) Радиус описанной окружности;
   в) перпендикуляр, проведенный из вершины А на прямую DM, где M – середина стороны AB.

2.Дано изображение треугольника ABC, одна сторона AB которого равна 10см., а другая сторона AC – 8см. Постройте изображение биссектрисы данного треугольника, проведенной из вершины А.

3. Постройте параллельную проекцию квадрата, вписанного в правильный треугольник.

Занятие 5. Полные и неполные изображения. Позиционные задачи. Построение сечений.

Цель: Понятие полного и неполного изображения, методы построений сечений.

1. Дана проектирующая плоскость и прямая общего положения. Найти точку пересечения прямой с данной плоскостью.
2. Построить сечение правильной пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки М и Р на боковых ребрах призмы, не принадлежащие одной грани, и точку К на боковой грани, не содержащей указанных ребер.
3. Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, заданной следом, не пересекающим основания призмы и точкой, лежащей в плоскости верхнего основания призмы.

Домашнее задание.

1. Через точку М в основании шестиугольной пирамиды ОАВСДЕН проведена плоскость, параллельная боковой грани ОАН. Построить сечение пирамиды этой плоскостью (за точку М взять центроид треугольника АВН).
2. Построить сечение пятиугольной призмы АВСДЕА0В0С0Д0Е0 плоскостью, проходящей через точку М на ребре С0Д0 а параллельно прямым С0Е0 и А0Е0

Планы практических занятий (7 семестр)

4 семестр

Занятие 1. Треугольники. Сумма углов треугольника. Замечательные точки и линии треугольника. Теорема Пифагора. Признаки равенства треугольников.

На занятии систематизируются знания учащихся о треугольниках и его высотах, его медианах, учащиеся формулируют и доказывают теоремы о точке пересечения медиан, о подобии треугольников, выводят формулу нахождения медианы треугольника, если известны его стороны, формулируют и доказывают теоремы о точке пересечения высот, о подобии треугольников, образованных высотой, опущенной и вершины прямого угла данного треугольника; выводят формулу нахождения высоты треугольника, если известны его стороны; знакомятся с минимальным свойством треугольника.

Теорема. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
Замечание: В случае тупоугольного треугольника основания его высот находятся на продолжениях сторон, прилежащих к тупому углу:
Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется ортоцентром.
Определение 2. Треугольник, образованный основаниями высот треугольника, называется ортоцентрическим.
Задания:

1. Доказать, что для произвольного треугольника АВС верно равенство: $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$, где r - радиус вписанной в треугольник окружности.

2. Пусть O, Q, M и H – соответственно центры описанной, вписанной окружностей, точка пересечения медиан и точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что если две любые из этих точек совпадают, то этот треугольник – равносторонний.

3. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, а на отрезках OB и OC выбраны точки B^1 и C^1, для которых $\angle AB^1C = = \angle AC^1B = 90°$. Доказать, что $AB^1 = AC^1$.
(Зарубежные математические олимпиады: Нью-Йорк, 76).

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.
Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется центроидом.

1. Длина медианы треугольника выражается формулой

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}},$$

где a, b, c – длины сторон треугольника.

2. Для всякого треугольника выполняется соотношение:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

4. m_a, m_b и m_c – медианы треугольника. Докажите, что если $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{27R^2}{4}$, то треугольник равносторонний, где R – радиус описанной окружности.

Теорема. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
Определение 1. Точка пересечения высот треугольника называется инцентром.

5. Пусть l_a, l_b, l_c – биссектрисы треугольника, p – его полупериметр. Докажите, что если
$l^2_a + l^2_b + l^2_c = p^2$, то треугольник равносторонний.

6. Дан ΔABC. Биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 его внутренних углов пересекаются в точке O. Известно, что треугольники AOB_1 и AOC_1 симметричны относительно прямой AO, треугольники A_1OB и BOC_1 – относительно BO, а треугольники A_1OC и B_1OC – относительно OC. Доказать, что ΔABC – равносторонний.

Домашнее задание.
1. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, а на отрезках OB и OC выбраны точки B и C , для которых AB C = = AC B = . Доказать, что AB = AC .
2. Треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найдите углы треугольника. (Всероссийская олимпиада, 1964г.(Москва)).
3. Пусть m_a, m_b, m_c – медианы треугольника, а h_a, h_b, h_c – его высоты. Докажите, что если $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} = 3$, то треугольник равносторонний.

Занятие 2. Параллелограмм. Трапеция.

1. На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника ABCD отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что AM = CP, BN = DQ, BM = DP, NC = QA. Докажите, что ABCD и MNPQ — параллелограммы.

2. Пусть M — середина стороны BC параллелограмма ABCD. В каком отношении отрезок AM делит диагональ BD?

3. Стороны параллелограмма равны 2 и 4, а угол между ними равен 60o. Через вершину этого угла проведены прямые, проходящие через середины двух других сторон параллелограмма. Найдите косинус угла между этими прямыми.

4. Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

5. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 41, высота равна 40 и средняя линия равна 45. Найдите основания.

6. Середину более длинной боковой стороны прямоугольной трапеции соединили с вершинами трапеции. При этом трапеция разделилась на три равнобедренных треугольника. Найдите величину острого угла трапеции.

Домашнее задание.
1. Два различных параллелограмма ABCD и A1B1C1D1 с соответственно параллельными сторонами вписаны в четырехугольник PQRS (точки A и A1 лежат на стороне PQ, B и B1- на QR и т. д.). Докажите, что диагонали четырехугольника параллельны сторонам параллелограммов.

2. В трапеции ABCD с основаниями AB = a и CD = b проведён отрезок A1B1, соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции проведён отрезок A2B2, тоже соединяющий середины диагоналей, и так далее. Может ли в последовательности длин отрезков AB, A1B1, A2B2,... какое-то число встретиться дважды? Является ли эта последовательность монотонной (возрастающей или убывающей)? Стремится ли она к какому-нибудь пределу?

3. Основания трапеции равны a и b (a > b). Отрезки, соединяющие середину большего основания с концами меньшего основания, пересекают диагонали трапеции в точках M и N. Найдите MN.

Занятие 3. Четырехугольники.

1. Угол между сторонами AB и CD четырехугольника ABCD равен j. Докажите, что AD2 = AB2 + BC2 + CD2 – 2(AB · BCcos B + BC · CDcos C + CD · ABcos j).

2. Середины M и N диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника ABCD не совпадают. Прямая MN пересекает стороны AB и CD в точках M1 и N1. Докажите, что если MM1 = NN1, то AD||BC.

3. Четырёхугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Найдите EF, если BC = 1.

4. Докажите, что если для вписанного четырехугольника ABCD выполнено равенство CD = AD + BC, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD.

5. Докажите, что если сумма косинусов углов четырёхугольника равна нулю, то он — параллелограмм, трапеция или вписанный четырёхугольник.

6. Четырёхугольник разделен диагоналями на четыре треугольника. Площади трёх из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвёртого треугольника. Найдите площадь данного четырёхугольника.

Домашнее задание.

1. В четырехугольник ABCD можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что AB > BC > KC, BK = 4 + , а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 14 и 7. Найдите DC.

2. В четырехугольник ABCD можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что BC > AB > KC, KC = 6 + , а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 22 и 11. Найдите DC.

3. В трапеции основания равны a и b, диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен A. Найдите площадь трапеции.

Занятие 4. Окружность. Углы связанные с окружностью. Вписанный и описанный четырехугольник.

Основные сведения
1. Угол ABC, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называют вписанным в окружность. Пусть O — центр окружности. Тогда
PABC = 1
2 PAOC,
если точки B и O лежат по одну сторону от AC, и PABC = 180° – 1
2 PAOC,
если точки B и O лежат по разные стороны от AC. Важнейшим и наиболее часто используемым следствием этого факта является то, что величины углов, опирающихся на равные хорды, либо равны, либо составляют в сумме 180°.

2. Величина угла между хордой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A, равна половине угловой величины дуги AB.

3. Угловые величины дуг, заключенных между параллельными хордами, равны.

4. Как уже говорилось, величины углов, опирающихся на одну хорду, могут быть равны, а могут составлять в сумме 180°. Для того чтобы не рассматривать различные варианты расположения точек на окружности, введем понятие «ориентированный угол между прямыми». Величиной ориентированного угла между прямыми AB и CD (обозначение: P(AB,CD)) будем называть величину угла. на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую AB так, чтобы она стала параллельна прямой CD. При этом углы, отличающиеся на n · 180°, считаются равными. Следует отметить, что ориентированный угол между прямыми CD и AB не равен ориентированному углу между прямыми AB и CD (они составляют в сумме 180° или, что по нашему соглашению то же самое, 0°).
Легко проверить следующие свойства ориентированных углов:
а) P(AB,BC) = – P(BC,AB);
б) P(AB,CD) + P(CD,EF) = P(AB,EF);
в) точки A,B,C,D, не лежащие на одной прямой, принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда P(AB,BC) = P(AD,DC) (для доказательства этого свойства нужно рассмотреть два случая: точки B и D лежат по одну сторону от AC; точки B и D лежат по разные стороны от AC).

ЗАДАЧИ

1.а) Из точки А, лежащей вне окружности, выходят лучи АВ и АС, пересекающие эту окружность. Докажите, что величина угла ВАС равна полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

б) Вершина угла ВАС расположена внутри окружности. Докажите, что величина угла ВАС равна полусумме угловых величин дуг окружности, заключенных внутри угла ВАС и внутри угла, симметричного ему относительно вершины А.

2.Из точки Р, расположенной внутри острого угла ВАС, опущены перпендикуляры РС1 и РВ1 на прямые АВ и АС. Докажите, что РС1АР = РС1В1Р.

1.Докажите, что если центр вписанной в четырехугольник окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей, то этот четырехугольник- ромб.

2.Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром O. Докажите, что PAOB + PCOD = 180°.

3.Докажите, что если существует окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырехугольника ABCD, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырехугольника перпендикулярны.

4.Окружность высекает на всех четырех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

Домашнее задание.

1Докажите, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то центр этой окружности лежит на одной прямой с серединами диагоналей.

2.Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром O. В треугольнике AOB проведены высоты AA1 и BB1, а в треугольнике COD- высоты CC1 и DD1. Докажите, что точки A1,B1,C1 и D1 лежат на одной прямой.

3. Углы при основании AD трапеции ABCD равны 2a и 2b. Докажите, что трапеция описанная тогда и только тогда, когда BC/AD = tg atg b.

Занятие 5. Подобные фигуры.

1. В треугольнике ABC на средней линии DE, параллельной AB, как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N. Найдите MN, если BC = a, AC = b, AB = c.

2. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S1, S2, S3. Найдите площадь данного треугольника.

3. В равнобедренный треугольник ABC (AB = BC) вписана окружность радиуса 3. Прямая l касается этой окружности и параллельна прямой AC. Расстояние от точки B до прямой l равно 3. Найдите расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC.

4. В трапеции ABCD диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD, а диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB. На продолжениях боковых сторон AB и DC за меньшее основание BC отложены отрезки BM и CN так, что получается новая трапеция BMNC, подобная трапеции ABCD. Найдите площадь трапеции ABCD, если площадь трапеции AMND равна P, а сумма углов CAD и BDA равна 60o.

5. Через точку A общей хорды BC пересекающихся окружностей проведена прямая, пересекающая окружности в таких точках D и E соответственно, что прямая BD касается одной окружности, а прямая BE — другой. Продолжение хорды CD одной окружности пересекает другую окружность в точке F. Найдите отношение BD : BE, если AD = 8 и AE = 2. Сравните площади треугольников BDE и BDF.

6. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если BC = 4, а AK = 6.

Домашнее задание.
1. В выпуклом четырёхугольнике ABCD известно, что площадь треугольника ODC (O — точка пересечения диагоналей) есть среднее пропорциональное между площадями треугольников BOC и AOD. Докажите, что ABCD — трапеция или параллелограмм.
2. Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH, а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что треугольники MNC и ABC подобны.
3. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре подобных треугольника. Докажите, что его можно разрезать на два равных треугольника.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Остыловский, А. Н. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. Н. Остыловский. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2011. - 92 с. - ISBN 978-5-7638-2196-3. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/443221 (дата обращения: 14.03.2022). – Режим доступа: по подписке.
2. Бортаковский, А. С. Аналитическая геометрия в примерах и задачах : учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — 2-е изд., стер. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 496 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-011202-2. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1069929 (дата обращения: 14.03.2022). – Режим доступа: по подписке.
3. Ефимов, Н.В. Краткий курс аналитической геометрии : учебное пособие : [16+] / Н.В. Ефимов. – 14-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2008. – 239 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69316 (дата обращения: 06.04.2021). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-9221-0971-0. – Текст : электронный.

Дополнительная литература

1. Ильин, В. А. Аналитическая геометрия : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 7-е изд., стер. – Москва : Физматлит, 2009. – 224 с. – (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 3). – Режим доступа: по подписке. – URL:

https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82797 (дата обращения: 14.03.2022). – ISBN 978-5-9221-0511-8. – Текст : электронный.
2. Осипенко, С. А. Аналитическая геометрия: прямая и плоскость : методическое пособие : [16+] / С. А. Осипенко, М. Г. Булатова. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. – 40 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=429201 (дата обращения: 14.03.2022). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-4475-3903-0. – DOI 10.23681/429201. – Текст : электронный.
3. Беклемишева, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : учебное пособие / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; ред. Д. В. Беклемишев. – 2-е изд., перераб. – Москва : Физматлит, 2006. – 496 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82795 (дата обращения: 14.03.2022). – ISBN 5-9221-0010-6. – Текст : электронный.

Интернет-ресурсы

– http://www.mathnet.ru Общероссийский математический портал