

Министерство просвещения Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Ульяновский государственный педагогический университет  
имени И.Н. Ульянова»  
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования  
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебно-методической  
работе С.Н.Титов

## **ЭЛЕМЕНТЫ ПРОЕКТИВНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Программа учебной дисциплины  
модуля специальных разделов предметной области  
основной профессиональной образовательной программы высшего  
образования – программы бакалавриата по направлению подготовки  
44.03.01 Педагогическое образование

направленность (профиль) образовательной программы  
Математика.

(заочная форма обучения)

Составитель: Гришина С.А., кандидат  
физико-математических наук, доцент  
Череватенко О.И., кандидат физико-  
математических наук

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-  
математического и технологического образования, протокол «15» мая  
2024 г. № 6

Ульяновск, 2024

### Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Элементы проективной и дифференциальной геометрии» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. Дисциплины (модули) модуля специальных разделов предметной области учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Математика», заочной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках курса «Геометрия», «Математический анализ», «Методы изображений» и школьного курса математики.

Результаты изучения дисциплины являются теоретической и методологической основой для прохождения практик «Научно-исследовательская работа» и итоговой государственной аттестации.

#### 1. Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Целями освоения дисциплины являются

- раскрытие значение геометрии, углубление представления о месте геометрии в изучении окружающего мира;
- изучение основных разделов геометрии и воспитание общей геометрической культуры, необходимой будущему учителю для понимания как основного курса математики, так и школьных факультативных курсов;
- способствовать развитию пространственного мышления.

Задачей освоения дисциплины является развитие умения самостоятельной работы с математической литературой, курс «Проективная геометрия» должен дать студентам знания, навыки и умения, необходимые для успешного изучения других разделов математики

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Элементы проективной и дифференциальной геометрии» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации	ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач	ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности

<p>ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач.</p> <p>ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).</p> <p>ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.</p>	<p>ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания;</p> <p>ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.</p>	<p>ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.</p>	<p>ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий,</p> <p>ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.</p>
<p>ПК-3. Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов.</p> <p>ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности</p>	<p>ОР-9. Знает характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике;</p> <p>ОР-10. Знает особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности.</p>	<p>ОР-11 Умеет оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов;</p> <p>ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности.</p>	<p>ОР-13. Владеет навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики.</p>

(исследовательской, проектной, групповой и др.).			
--	--	--	--

**2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Номер семестра	Учебные занятия								Форма промежуточной аттестации
	Всего		Лекции, час.	Практические занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Лабораторные занятия, час.	в т. ч. практическая подготовка, час.	Самост. работа, час.	
	Трудоемк.								
	Зач. ед.	Часы							
9	3	108	4	10	-	-	-	85	экзамен (9)
Итого :	3	108	4	10	-	-	-	85	9

**3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

Наименование раздела и тем	Количество часов по формам организации обучения			
	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
<b>9 семестр</b>				
Понятие проективного пространства Прямые на проективной плоскости	2			15
Проективные преобразования Двойное (сложное) отношение		4		15
Линии второго порядка на проективной плоскости				15
Понятие гладкой линии	2	2		15

Понятие гладкой поверхности Понятие внутренней геометрии поверхности		4		25
<b>Всего по дисциплине:</b>	<b>4</b>	<b>10</b>	<b>-</b>	<b>85</b>

### 3.2. Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

#### Краткое содержание курса

##### I. ПОНЯТИЕ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА.

Определение проективного пространства. Модели проективной плоскости и проективного пространства. Аксиомы проективной плоскости. Проективные координаты. Расширенная прямая и плоскость. Проективные реперы на расширенной прямой и плоскости. Преобразование проективных координат. Простейшие свойства проективного пространства

##### II. ПРЯМЫЕ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Уравнение прямой на проективной плоскости. Принцип двойственности. Формы первой степени. Теорема Дезарга.

##### III. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Проективные преобразования. Группа проективных преобразований. Предмет проективной геометрии.

##### IV. ДВОЙНОЕ (СЛОЖНОЕ) ОТНОШЕНИЕ

Двойное (сложное) отношение и его инвариантность при проективных преобразованиях Гармоническая четверка точек. Построение четвертой гармонической. Проективные соответствия в формах первой степени.

##### V. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линии второго порядка на проективной плоскости. Канонические уравнения линий второго порядка в проективных координатах Проективная классификация линий второго порядка. Полюс и поляра Понятие о полярном соответствии. Геометрия на проективной плоскости с фиксированной прямой. Евклидова геометрия с проективной точки зрения.

##### VI. ПОНЯТИЕ ГЛАДКОЙ ЛИНИИ

Непрерывность и дифференцируемость вектор–функции. Разложение в ряд Тейлора. Производная вектор – функции постоянной длины.

Понятие линии, гладкие линии. Длина дуги как особый параметр кривой.

Сопровождающий трехгранник кривой. Формулы Френе. Касательная прямая и нормальная плоскость кривой. Соприкасающаяся плоскость. Натуральные уравнения кривой. Кривизна и кручение.

##### VII. ПОНЯТИЕ ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Понятие поверхности. Гладкие поверхности, их параметризация с помощью вектор-функции. Касательная плоскость и нормаль. Первая квадратичная форма поверхности и ее приложения.

Кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны. Полная и средняя кривизны поверхности. Поверхности постоянной кривизны.

##### VIII. ПОНЯТИЕ ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ

Предмет внутренней геометрии поверхности. Теорема Гаусса. Понятие об изгибании поверхности. Геодезическая кривизна кривой. Геодезические линии. Теорема Гаусса-Бонне. Дефект геодезического треугольника. Реализация в малом геометрии Лобачевского на поверхности постоянной отрицательной кривизны.

#### 4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательную, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:

- подготовки к устным выступлениям по материалам лекций, самостоятельных докладов, презентаций;
- подготовки тестов по вопросам программы
- домашних заданий для самостоятельного решения

*Задания для типовых контрольных работ*

### **ОС-1. Самостоятельная работа**

1. Вычислить сложное отношение четырех коллинеарных точек прямой.
2. Вычислить сложное отношение четырех прямых пучка.
3. Построить четвертую гармоническую точку.
4. Определить элементы на конфигурации Дезарга.

### **ОС-2. Самостоятельная работа**

Дана поверхность

Найти касательную плоскость и нормаль к поверхности в точке ( $u = v = 0$ )

Вычислить  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в произвольной точке поверхности.

Найти ортогональные траектории к координатным линиям.

Вычислить нормальную кривизну координатных линий.

Вычислить нормальную кривизну линии  $\gamma: 4 + v^3 - 8 = 0$  в точке  $(u=0, v=2)$

### ОС-3. Контрольная работа

1. Определить фигуры, двойственные трехвершиннику по большому и малому принципам двойственности.
2. Доказать теорему, двойственную по большому принципу двойственности теореме: через всякую прямую проходят по крайней мере две плоскости.
3. На сторонах АВ и ВС треугольника ABC взяты точки М и N соответственно. Построены отрезки MN и AN. Выполнить двойственное построение.
4. Сформулировать теорему, двойственную обратной теореме Дезарга в пространстве, и доказать ее.
5. Вычислить кривизну линии в начале координат.
6. Доказать что линия  $\gamma$ : плоская и найти плоскость, в которой она лежит.
7. Составить натуральное уравнение кривой  $\gamma: a < t < b$ .
8. Найти длину дуги кривой  $\gamma: u = av^2$  заключенной между точками  $A(u = 0, v = 0)$  и  $B(u = 2a, v = 2)$  поверхности  $\Phi: x = (\cos v + \sin v), y = (\cos v - \sin v), z = av^2$ .
9. Вычислить вторую квадратичную форму  
А) сферы Б) цилиндра

*Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:*

1. Гришина С.А., Кувшинова А.Н., Куренева Т.Н., Череватенко О.И. Геометрия: учебно-методическое пособие. Часть 3. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. – 112 с..
2. Куренева Т.Н. Методические указания и контрольная работа № 3 по теме «Методы изображений. Проективная геометрия». Для студентов – заочников 3 курса физико-математического факультета. - Ульяновск, 2004. (Библиотека УлГПУ).

### 5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

#### Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

**Цель проведения аттестации** – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

**Промежуточная аттестация** осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль

усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

№ п/п	<b>СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,</b> используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции	Образовательные результаты дисциплины
	<b>Оценочные средства для текущей аттестации</b> ОС-1 Самостоятельная работа  ОС-2 Самостоятельная работа  ОС-3 Контрольная работа ОС-4 Тест	ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики. ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.
	<b>Оценочные средства для промежуточной аттестации зачет (экзамен)</b> ОС-5 экзамен в форме устного собеседования	ОР-10. Знает особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности.

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

***Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине***

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

***Материалы, используемые для промежуточного контроля успеваемости обучающихся по дисциплине***

**ОС-5. Примерный перечень вопросов к экзамену**

1. Перспективное соответствие между плоскостью и связкой. Особые лучи и особая плоскость связки.
2. Расширенная плоскость. Несобственные элементы.
3. Свойства проективной прямой и проективной плоскости.
4. Аксиомы проективного пространства.
5. Проективные координаты.
6. Прямая на проективной плоскости. Координаты прямой.
7. Принципы двойственности (малый и большой) формы первой степени.
8. Теорема Дезарга.
9. Перспективные и проективные отображения в формах первой степени. Определение проективности по Понселе.
10. Сложное отношение 4-х элементов в формах первой степени (рядах и пучках).
11. Инвариантность сложного отношения при проектированиях и сечениях. Определение проективности по Штейнеру.
12. Гармонические четверки элементов в формах первой степени. Четырехвершинник и его гармонические свойства.

13. Свойства проективных отображений в формах первой степени.
14. Построение проективного соответствия в рядах.
15. Построение проективного соответствия в пучках.
16. Теорема Штейнера.
17. Теорема Паскаля. Построение точек линии второго порядка на основе теоремы Паскаля.
18. Линии второго порядка на проективной плоскости. Пересечение линии 2-го порядка с прямой.
19. Касательная к линии второго порядка.
20. Проективная классификация линий второго порядка.
21. Полюсы и поляры теоремы о свойствах полюсов и поляр.
22. Преобразование координат. Проективные преобразования. Предмет проективной геометрии.
23. Полярное преобразование. Автополярные фигуры.
24. Понятие поверхности. Ее уравнения.
25. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Вывод уравнений.
26. Первая квадратичная форма поверхности. Некоторые задачи внутренней геометрии.
27. Вторая квадратичная форма поверхности.
28. Кривизна кривой на поверхности.
29. Главные направления и главные кривизны.
30. Формула Эйлера.
31. Полная и средняя кривизны поверхности.
32. Геодезическая кривизна линии на поверхности.
33. Геодезические линии на поверхности. Их свойства.
34. Теорема Гаусса-Бонне.
35. Поверхности постоянной кривизны и их внутренняя геометрия.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

### **Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине**

*Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся*

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
<b>9 семестр</b>	Разбалловка по видам работ	2 x 1=2 баллов	5 x 1=5 баллов	229 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	2 баллов max	7 балла max	236 баллов max	300 баллов max

*Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра*

<b>Оценка</b>	<b>Баллы (З ЭЕ)</b>
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	150. менее

### **6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удастся осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

#### **Подготовка к практическим занятиям.**

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических заданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

### **Планы практических занятий**

#### **Занятие 1. Принципы двойственности. Теорема Дезарга.**

Цель: Принципы двойственности, применение принципов двойственности при доказательствах основных фактов геометрии. Применение основной теоремы проективной геометрии для решения задач.

1. Определить фигуры, двойственные трехвершиннику по большому и малому принципам двойственности.
2. Доказать теорему, двойственную по большому принципу двойственности теореме: через всякую прямую проходят по крайней мере две плоскости.
3. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.  $AA' \cap BB' \cap CC' = S$ .
4. В евклидовой плоскости в четырехугольник вписана трапеция, параллельные стороны которой  $\parallel$  его диагонали. Доказать, что непараллельные стороны трапеции пересекаются на другой диагонали.
5. В треугольнике  $ABC$  из его вершин проведены прямые, пересекающиеся в одной точке  $S$ ;  $A' = AS \cap BC$ ,  $B' = BS \cap AC$ ,  $C' = CS \cap AB$ . Доказать, что точки  $BC \cap B'C'$ ,  $AC \cap A'C'$ ,  $AB \cap A'B'$  лежат на одной прямой.
6. В конфигурации Дезарга одну из точек выбрать за дезаргову точку. Найти в этой конфигурации вершины дезарговых треугольников и дезаргову прямую.
7. Сформулировать в терминах евклидовой геометрии теорему Дезарга для случая:

1)  $S$  - несобственная, дезаргова прямая  $S$  - собственная. Формулировка теоремы Дезарга: Если прямые проходящие через соответствующие вершины двух треугольников параллельны, то точки пересечения соответствующих сторон лежат на одной прямой.

2)  $S$  собственная, прямая  $S$ ? - несобственная.

Домашнее задание.

1. Какая фигура двойственно треугольнику по малому принципу двойственности?
2. Доказать предложение, двойственное данному: существуют четыре плоскости, не принадлежащие как одной прямой, так и одной точке.

## Занятие 2. Сложное отношение. Гармонизм.

Цель: Понятие сложного отношения четырех элементов в формах первой ступени, свойства.

1. Четыре коллинеарные точки  $A, B, C$  и  $D$  заданы своими аффинными координатами:  $A(2, -3), B(3, -1), C(4, 1)$  и  $D(5, 3)$ . Вычислить значения сложного отношения этих точек, соответствующие всевозможным их перестановкам.

2. Три коллинеарные точки  $A(-3, 1), B(2, 11), C(1, 9)$  заданы своими аффинными координатами. Найти на этой прямой точку  $D(x, y)$ , удовлетворяющую условию:  $(AB, CD) = -2$ .

3. Четыре прямые одного пучка  $a, b, c, d$  заданы своими уравнениями относительно аффинной системы координат:  $(a)y-3=-(x+2), (b)y-3=x+2, (c)y-3=3(x+2), (d)y-3=5(x+2)$ . Вычислить сложное отношение  $(ab, cd)$ .

4. Четыре прямые  $a, b, c, d$  принадлежат одному пучку. Прямые  $a, b$  заданы своими уравнениями относительно аффинной системы координат:  $(a)3x+y-5=0, (b)x-y+1=0$ . Прямая  $c$  проходит через начало координат.  $(ab, cd) = 3$ . Составить уравнение прямой  $d$ .

5. На прямой даны три точки  $A, B, C$ . Пользуясь одной линейкой, построить четвертую гармоническую точку  $D$ .

6. Даны три прямые одного пучка. Пользуясь одной линейкой, построить четвертую гармоническую прямую.

Домашнее задание.

1. На евклидовой прямой даны четыре точки  $A(3), B(8), C(7)$  и  $D(13)$ . Вычислить значения сложного отношения этих точек, соответствующие всевозможным их перестановкам

2. Три коллинеарные точки  $A(-4, 0), B(0, 8), C(1, 10)$  заданы своими аффинными координатами. Найти на этой прямой точку  $D(x, y)$ , удовлетворяющую условию:  $(AB, CD) = 3$ .

3. Четыре прямые одного пучка  $a, b, c, d$  заданы своими уравнениями относительно аффинной системы координат:  $(a)x-y-3=0, (b)2x-y-4=0, (c)3x-y-5=0, (d)5x-y-7=0$ . Вычислить сложное отношение  $(ab, cd)$ .

**Занятие 3.** Кривизна и кручение кривой. Нормальные уравнения кривой. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

**Цель:** Разобрать основные понятия дифференциальной геометрии.

### Рекомендации к самостоятельной работе

1. Проработать материал по теме практического занятия.
2. Повторить лекционный материал по теме занятия.

**Занятие 4.** Первая квадратичная форма и ее приложение.

**Цель:** Разобрать основные понятия дифференциальной геометрии.

### Рекомендации к самостоятельной работе

1. Проработать материал по теме практического занятия.
2. Повторить лекционный материал по теме занятия.

**Занятие 5.** Вторая квадратичная форма и ее приложение.

**Цель:** Разобрать основные понятия дифференциальной геометрии.

**Рекомендации к самостоятельной работе**

1. Проработать материал по теме практического занятия.
2. Повторить лекционный материал по теме занятия.

**7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины**

**Основная литература**

1. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 304 с.  
<http://znanium.com/bookread2.php?book=544615>
2. Розендорн, Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Э. Р. Розендорн. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 144с.  
<http://znanium.com/bookread2.php?book=544679>

**Дополнительная литература**

1. Понарин, Я. П. Аффинная и проективная геометрия : учебное пособие : [16+] / Я. П. Понарин. – Москва : МЦНМО, 2009. – 288 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63272> (дата обращения: 02.05.2023). – ISBN 978-5-94057-401-9. – Текст : электронный.
2. Ефимов Н.В. Высшая геометрия: учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, - 2011. - 585 с. (<http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=544579>)

**Интернет-ресурсы**

- <http://www.mathnet.ru> Общероссийский математический портал

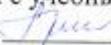
Лист согласования рабочей программы  
учебной дисциплины (практики)

**Направление подготовки:** 44.03.01 Педагогическое образование, 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки).

**Рабочая программа** Элементы проективной и дифференциальной геометрии

**Составители:** С.А. Гришина, О.И. Череватенко – Ульяновск: УлГПУ, 2024.

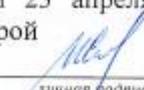
Программа составлена с учетом федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утвержденного Министерством образования и науки Российской Федерации, и в соответствии с учебным планом.

Составители  С.А. Гришина  
(подпись)

 О.И. Череватенко  
(подпись)

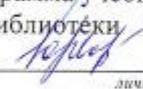
Рабочая программа учебной дисциплины (практики) одобрена на заседании кафедры высшей математики "23" апреля 2024г., протокол № 8

Заведующий кафедрой

 Столярова И.В. 23.04.24  
личная подпись      расшифровка подписи      дата

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) согласована с библиотекой

Сотрудник библиотеки

 Марсакова Ю.Б. 23.04.24  
личная подпись      расшифровка подписи      дата

Программа рассмотрена и одобрена на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования "15" мая 2024 г., протокол № 6  
Декан факультета физико-математического и технологического образования

 Череватенко О.И. 15.05.24