Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова»
(ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»)

Факультет физико-математического и технологического образования
Кафедра высшей математики

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 02AF187D00A4B197B2418596110F4A276D
Владелец: Титов Сергей Николаевич
Действителен: с 05.07.2024 до 28.04.2038

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе С.Н. Титов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Программа учебной дисциплины
Предметно-методического модуля по профилю «Математика»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),

направленность (профиль) образовательной программы
Физика. Математика

(очная форма обучения)

Составитель:
Сибирева А.Р., к.ф.-м.н, доцент, доцент кафедры высшей математики

Рассмотрено и одобрено на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования, протокол от 15 мая 2024 г. № 6.

Ульяновск, 2024

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Математический анализ» относится к дисциплинам Блока 1. Дисциплины (модули), Б1.О Обязательная часть, Б1.О.08. Предметно-методического модуля по профилю «Математика» учебного плана основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы «Физика. Математика», очной формы обучения.

Дисциплина опирается на результаты обучения, сформированные в рамках дисциплины «Высшая математика», в рамках которой изучается одномерный математический анализ, теория рядов. Дисциплина включает разделы «Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных», «Элементы векторного и тензорного анализа», «Теория функций комплексного переменного», «Теория функций действительного переменного», «Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными».

Курс математического анализа, в том числе – многомерного, является математической основой для изучения физики.

Курс является предшествующим для дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика».

Результаты изучения дисциплины являются основой для прохождения практик: Педагогическая практика, Научно-исследовательская работа.

Перечень планируемых результатов обучения (образовательных результатов) по дисциплине

Цель дисциплины «Математический анализ» – освоение бакалавром системы базовых понятий, идей и методов классического математического анализа, формирование навыков решения задач, умения оперировать математическим аппаратом, развитие абстрактно-логического мышления, подготовка к преподаванию школьных курсов математики.

Задачи дисциплины связаны с формированием общекультурных и профессиональных компетенций и включают формирование логической и алгоритмической культуры, системных знаний по базовым разделам современной математики, представлений о структуре математического знания в целом.

В результате освоения программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Математический анализ» (в таблице представлено соотнесение образовательных результатов обучения по дисциплине с индикаторами достижения компетенций):

Компетенция и индикаторы ее достижения в дисциплине	Образовательные результаты дисциплины (этапы формирования дисциплины)		
	знает	умеет	владеет
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и	ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации	ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач	ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности

чужой мыслительной деятельности.			
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач. ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.	ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания; ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.	ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.	ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий, ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.
ПК-3. Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов. ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей	ОР-9. Знает характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике; ОР-10. Знает особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности.	ОР-11 Умеет оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов; ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности.	ОР-13. Владеет навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики.

учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).			

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Номер семестра	Учебные занятия								Форма итоговой аттестации
	Всего		Лекции, час	Лабораторные занятия, час	В т.ч. практическая	Практические занятия, час	В т.ч. практическая	Самостоятельная работа, час	
	Трудоемкость								
	Зачет. ед.	Часы							
4	4	144	24	-	-	40	-	53	экзамен 27
5	3	108	18	-	-	30	-	33	экзамен 27
6	3	108	18	-	-	30	-	33	экзамен 27
Итого	10	360	60	-	-	100	-	119	81

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1. Указание тем (разделов) и отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ п/п	Наименование разделов и тем (с разбивкой на модули)	Количество часов по формам организации обучения			
		Лекционные занятия	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа
4-й семестр (4 ЗЕ)					
1.	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	10	-	18	20
2.	Кратные и криволинейные интегралы	10	-	16	20
3.	Элементы векторного и тензорного анализа	4		6	13
Итого за 4-й семестр		**24**	**-**	**40**	**53**

5-й семестр (3 ЗЕ)				
Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными	14	-	24	23
Элементы теории функций действительного переменного	4		6	10
Итого за 5-й семестр	**18**	**-**	**30**	**33**
6-й семестр (3 ЗЕ)				
Элементы теории функций действительного переменного	4	-	4	10
Теория функций комплексного переменного	14	-	26	23
Итого за 6-й семестр	**18**	**-**	**30**	**33**
Всего	**60**	**-**	**100**	**119**

3.2.Краткое описание содержания тем (разделов) дисциплины

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Функции нескольких переменных: область определения, линии (поверхности) уровня, способы графического представления функций двух, трех переменных. Предел функции нескольких переменных: определение в терминах окрестностей и в терминах последовательностей. Непрерывность функции нескольких переменных.

Частные производные функции нескольких переменных Производная функции нескольких переменных в точке по заданному направлению. Геометрический смысл производных по направлению, частных производных функции двух переменных. Градиент функции нескольких переменных в точке, геометрический и физический смысл градиента. Дифференцируемость функции нескольких переменных, полный дифференциал. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных; касательная плоскость и нормаль к поверхности. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в точке.

Производные высших порядков функции нескольких переменных. Смешанные производные, условия равенства смешанных производных. Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных, форма n-го дифференциала. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.

Теорема о существовании неявной функции. Теорема о дифференцировании неявной функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной неявно.

Точки экстремума функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума функции нескольких переменных (теорема Ферма). Достаточные условия экстремума точки функции нескольких переменных в терминах второго дифференциала. Критерий Сильвестра (без доказательства). Случай функции двух переменных.

Условный экстремум функции нескольких переменных при одном или нескольких условиях связи. Метод исключения переменных. Метод неопределенных множителей Лагранжа: необходимое условие условного экстремума в терминах лагранжиана, понятие о достаточных условиях условного экстремума.

Теорема Вейерштрасса для функции нескольких переменных, определенной на компакте. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в области.

Кратные и криволинейные интегралы

Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Двойной интеграл как предел интегральных сумм. Достаточные условия существования двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области интегрирования, в случае области, элементарной относительно одной из осей координат. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Геометрические и физические приложения двойного интеграла.

Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла. Тройной интеграл как предел интегральных сумм. Достаточные условия существования тройного интеграла. Свойства тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному в случае интегрирования по прямоугольному параллелепипеду (брусу), в случае области интегрирования, элементарной относительно одной из координатных плоскостей, одной из осей координат. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и в сферических координатах. Геометрические и физические приложения тройного интеграла.

Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла по длине дуги, по координатам. Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги) вдоль плоской или пространстве ной кривой как предел интегральных сумм. Основные свойства криволинейного интеграла первого рода. Сведение криволинейного интеграла первого рода к интегралу Римана. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам) вдоль плоской или пространственной кривой как предел интегральных сумм. Основные свойства криволинейного интеграла второго рода. Сведение криволинейного интеграла второго рода к интегралу Римана. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Приложения криволинейных интегралов. Вычисление работы силы при криволинейном перемещении тела.

Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора плоского контура интегрирования, соединяющего две данные точки плоскости. Первообразная полного дифференциала, интеграл от полного дифференциала как разность значений первообразной.

Задачи, приводящие к понятию поверхностного интеграла по площади поверхности, по координатам. Квадрируемые поверхности, площадь поверхности. Понятие о поверхностных интегралах первого и второго рода, их свойствах, их сведении к двойным интегралам.

Формула Остроградского-Гаусса и формула Стокса. Условия независимости поверхностного интеграла второго рода от выбора поверхности, натянутой на данный контур. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора контура интегрирования, соединяющего две данные точки пространства.

Элементы векторного и тензорного анализа

Скалярные и векторные поля. Вектор-функция от скалярного аргумента и векторные поля. Производная по направлению. Градиент скалярного поля и его свойства, дивергенция и ротор векторного поля. Циркуляция векторного поля вдоль кривой. Поток векторного поля через поверхность. Формулы Стокса, Остроградского-Гаусса в обозначениях векторной теории поля. Потенциальные и соленоидальные поля. Дифференциальные операторы первого и второго порядка, оператор Лапласа. Использование символических обозначений с ∇-оператором. Основные понятия тензорного исчисления.

Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными

Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений(ОДУ). Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Физические и геометрические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям, задача Коши.

Уравнения с разделяющимися переменными, однородные относительно переменных. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка, уравнения Бернулли, в полных дифференциалах.

Дифференциальные уравнения 2-го порядка. Методы понижения порядка. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Задача о колебаниях груза на пружине и ее исследование. Системы линейных дифференциальных уравнений. Элементы теории устойчивости. Уравнения с частными производными: основные определения и понятия.

Элементы теории функций действительного переменного

Мощность множества. Счетные множества. Множества мощности континуум.

Множества, измеримые по Лебегу на прямой, на плоскости. Свойства меры Лебега. Множества нулевой меры Лебега.

Понятие измеримой числовой функции. Свойства измеримых функций. Понятие интеграла Лебега от измеримой ограниченной функции. Существование интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Интеграл Лебега от неограниченной функции. Суммируемые функции. Пространства $L_1[a;b]$ и $L_2[a;b]$

Теория функций комплексного переменного

Поле C комплексных чисел. Множество комплексных чисел как банахово пространство. Окрестности. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Стереографическая проекция. Сходимость последовательностей. Ряды комплексныъ чисел. Комплекснозначные функции действительной переменной и кривые на комплексной плоскости; дифференцирование и интегрирование комплекснозначных функций действительной переменной. Функция комплексной переменной; её действительная и мнимая части, геометрическое истолкование; предел, непрерывность.

Дифференцируемые функции комплексной переменной. Производная. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции комплексной переменной (в точке, в области; определение в терминах дифференцируемости). Гармонические функции и их связь с аналитическими.

Последовательности и ряды функций комплексной переменной. Степенные ряды: круг и радиус сходимости. Дифференцирование степенных рядов. Определение аналитической функции как суммы степенного ряда. Равносильность двух определений аналитической функции. Неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.

Понятие об аналитическом продолжении (с действительной оси в комплексную плоскость). Экспонента, тригонометрические и гиперболические функции в комплексной области, связь между ними. Дробно-линейная функция. Многозначные функции. Понятие римановой поверхности. Логарифмическая функция в комплексной области. Степень с произвольным комплексным показателем. Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции.

Интеграл от функции комплексной переменной по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Первообразная и интеграл. Интегральная формула Коши.

Ряды Тейлора и ряды Лорана и их области сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек. Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Вычет аналитической функции. Вычисление вычетов. Применение вычетов к вычислению интегралов.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа студентов является особой формой организации учебного процесса, представляющая собой планируемую, познавательно, организационно и методически направляемую деятельность студентов, ориентированную на достижение конкретного результата, осуществляемую без прямой помощи преподавателя. Самостоятельная работа студентов является составной частью учебной работы и имеет целью закрепление и углубление полученных знаний и навыков, поиск и приобретение новых знаний, а также выполнение учебных заданий, подготовку к предстоящим занятиям и экзамену. Она предусматривает, как правило, разработку рефератов, написание докладов, выполнение творческих, индивидуальных заданий в соответствии с учебной программой (тематическим планом изучения дисциплины). Тема для такого выступления может быть предложена преподавателем или избрана самим студентом, но материал выступления не должен дублировать лекционный материал. Реферативный материал служит дополнительной информацией для работы на практических занятиях. Основная цель данного вида работы состоит в обучении студентов методам самостоятельной работы с учебным материалом. Для полноты усвоения тем, вынесенных в практические занятия, требуется работа с первоисточниками. Курс предусматривает самостоятельную работу студентов со специальной литературой. Следует отметить, что самостоятельная работа студентов результативна лишь тогда, когда она выполняется систематически, планомерно и целенаправленно.

Задания для самостоятельной работы предусматривают использование необходимых терминов и понятий по проблематике курса. Они нацеливают на практическую работу по применению изучаемого материала, поиск библиографического материала и электронных источников информации, иллюстративных материалов. Задания по самостоятельной работе даются по темам, которые требуют дополнительной проработки.

Общий объем самостоятельной работы студентов по дисциплине включает аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу студентов в течение семестра.

Аудиторная самостоятельная работа осуществляется в форме выполнения тестовых заданий, кейс-задач, письменных проверочных работ по дисциплине. Аудиторная самостоятельная работа обеспечена базой тестовых материалов, кейс-задач по разделам дисциплины.

Внеаудиторная самостоятельная работа осуществляется в формах:
- подготовки к устным докладам;
- решение задач (домашних заданий) по изучаемым темам;
- выполнение групповых интерактивных заданий.

Для самостоятельной подготовки к занятиям по дисциплине рекомендуется использовать учебно-методические материалы:

1. Волкова Н.А., Столярова И.В., Фолиадова Е.В. История математики: учебно-методические рекомендации. –Ульяновск. УлГПУ им. И.Н. Ульянова. 2017 – 39 с.
2. Распутько Т. Б., Сибирева А.Р. Функции нескольких переменных: методические указания. –Ульяновск: УлГТУ, 2004. – 32 с. – 2017 [Электронный].
3. Сибирева А.Р., Ригер Т.В. Кратные интегралы. Методические указания к типовому расчету по высшей математике. –Ульяновск: УлГТУ, 1997. – 32 с. – 2017 [Электронный].
4. Сибирева А.Р., Савинов Н.В. Качественные задачи и контрпримеры на тему «Пределы». Методические указания. – Ульяновск: УлГТУ, 2001. – 32 с. –2017 [Электронный].

5. Примерные оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Организация и проведение аттестации студента

ФГОС ВО ориентированы преимущественно не на сообщение обучающемуся комплекса теоретических знаний, но на выработку у бакалавра компетенций – динамического набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда и успешно профессионально реализовываться.

В процессе оценки бакалавров необходимо используются как традиционные, так и инновационные типы, виды и формы контроля. При этом постепенно традиционные средства совершенствуются в русле компетентностного подхода, а инновационные средства адаптированы для повсеместного применения в российской вузовской практике.

Цель проведения аттестации – проверка освоения образовательной программы дисциплины-практикума через сформированность образовательных результатов.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины; помогает оценить крупные совокупности знаний и умений, формирование определенных компетенций.

Оценочными средствами текущего оценивания являются: доклад, тесты по теоретическим вопросам дисциплины, защита практических работ и т.п. Контроль усвоения материала ведется регулярно в течение всего семестра на практических (семинарских, лабораторных) занятиях.

<table>
<tr><th>№
п/п</th><th>СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ,
используемые для текущего оценивания показателя формирования компетенции</th><th>Образовательные
результаты дисциплины</th></tr>
<tr><td></td><td>ОС-1. Самостоятельная работа
ОС-2. Индивидуальная контрольная работа
ОС-3. Контрольная работа
ОС-4. Примерный перечень тем докладов и рефератов
ОС-5. Контрольная работа
ОС-6. Контрольная работа
ОС-7. Тест</td><td rowspan="2">ОР-1. Знает методы критического анализа и синтеза информации
ОР-2 Умеет применять системный подход для решения поставленных задач
ОР-3 Владеет навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности ОР-4. Знает роль и место математики в общей картине научного знания;
ОР-5. Знает структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.
ОР-6 умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.
ОР-7 владеет действием проектирования различных форм учебных занятий,
ОР-8 владеет навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике
ОР-9. Знает характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике;
ОР-10. Знает особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности.
ОР-11 Умеет оказывать педагогическую поддержку</td></tr>
<tr><td></td><td>Оценочные средства для промежуточной аттестации
зачет (экзамен)
экзамен в форме устного собеседования
ОС-8.Экзамен (4 семестр)
ОС-9.Экзамен(5 семестр)
ОС-10.Экзамен(6 семестр)</td></tr>
</table>

		обучающимся в зависимости от их образовательных результатов; ОР-12 Умеет организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности ОР-13. Владеет навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики.

Описание оценочных средств и необходимого оборудования (демонстрационного материала), а так же процедуры и критерии оценивания индикаторов достижения компетенций на различных этапах их формирования в процессе освоения образовательной программы представлены в Фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине:
ОС-1. Самостоятельная работа по теме «Дифференцирование функции нескольких переменных»
ОС-2. Индивидуальная контрольная работа «Функции нескольких переменных»
ОС-3. Контрольная работа по теме «Кратные и криволинейные интегралы»
ОС-4. Примерный перечень тем докладов и рефератов
ОС-5. Контрольная работа по теме «Дифференциальные уравнения»
ОС-6. Индивидуальная контрольная работа «Функции комплексного переменного»
ОС-7. Тест.

Материалы, используемые для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

Материалы для организации текущей аттестации представлены в п.5 программы.

ОС-8. Экзамен (4 семестр)

Примерные практические задания к экзамену

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

1. Функции нескольких переменных: область определения, линии (поверхности) уровня, способы графического представления функций двух, трех переменных.
2. Предел функции нескольких переменных: определение в терминах окрестностей и в терминах последовательностей. Непрерывность функции нескольких переменных.
3. Частные производные функции нескольких переменных
4. Производная функции нескольких переменных в точке по заданному направлению. Геометрический смысл производных по направлению, частных производных функции двух переменных.
5. Градиент функции нескольких переменных в точке, геометрический смысл градиента.
6. Дифференцируемость функции нескольких переменных, полный дифференциал.
7. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных; касательная плоскость и нормаль к поверхности.
8. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в точке.

9. Производные высших порядков функции нескольких переменных. Смешанные производные, условия равенства смешанных производных.
10. Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных, форма n-го дифференциала.
11. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
12. Теорема о существовании неявной функции. Теорема о дифференцировании неявной функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной неявно.
13. Точки экстремума функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума функции нескольких переменных (теорема Ферма).
14. Достаточные условия экстремума точки функции нескольких переменных в терминах второго дифференциала.
15. Точки экстремума функции нескольких переменных. Критерий Сильвестра (без доказательства). Случай функции двух переменных.
16. Условный экстремум функции нескольких переменных при одном или нескольких условиях связи. Метод исключения переменных.
17. Метод неопределенных множителей Лагранжа: необходимое условие условного экстремума в терминах лагранжиана, понятие о достаточных условиях условного экстремума.
18. Теорема Вейерштрасса для функции нескольких переменных, определенной на компакте. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в области.

Кратные и криволинейные интегралы

19. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
20. Двойной интеграл как предел интегральных сумм. Достаточные условия существования двойного интеграла.
21. Свойства двойного интеграла.
22. Сведение двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области интегрирования, в случае области, элементарной относительно одной из осей координат.
23. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.
24. Геометрические и физические приложения двойного интеграла.
25. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.
26. Тройной интеграл как предел интегральных сумм.
27. Достаточные условия существования тройного интеграла.
28. Свойства тройного интеграла.
29. Сведение тройного интеграла к повторному в случае интегрирования по прямоугольному параллелепипеду (брусу), в случае области интегрирования, элементарной относительно одной из координатных плоскостей, одной из осей координат.
30. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и в сферических координатах.
31. Геометрические и физические приложения тройного интеграла.
32. Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла по длине дуги. Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги) вдоль плоской или пространстве ной кривой как предел интегральных сумм.
33. Основные свойства криволинейного интеграла первого рода. Сведение криволинейного интеграла первого рода к интегралу Римана.
34. Приложения криволинейного интеграла 1 рода.
35. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам) вдоль плоской или пространственной кривой как предел интегральных сумм. Основные свойства криволинейного интеграла второго рода. Сведение криволинейного интеграла второго

рода к интегралу Римана. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.
36. Приложения криволинейных интегралов 2 рода. Вычисление работы силы при криволинейном перемещении тела.
37. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла.
38. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора плоского контура интегрирования, соединяющего две данные точки плоскости. Первообразная полного дифференциала, интеграл от полного дифференциала как разность значений первообразной.
39. Задачи, приводящие к понятию поверхностного интеграла по площади поверхности. Квадрируемые поверхности, площадь поверхности.
40. Понятие о поверхностных интегралах первого и второго рода, их свойствах, их сведении к двойным интегралам.
41. Формула Остроградского-Гаусса. Условия независимости поверхностного интеграла второго рода от выбора поверхности, натянутой на данный контур.
42. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора контура интегрирования, соединяющего две данные точки пространства.

Элементы векторного и тензорного анализа

43. Скалярные и векторные поля. Градиент скалярного поля, дивергенция и ротор векторного поля.
44. Циркуляция векторного поля вдоль кривой.
45. Поток векторного поля через поверхность.
46. Формулы Стокса, Остроградского-Гаусса в обозначениях векторной теории поля.
47. Потенциальные и соленоидальные поля.
48. Дифференциальные операции второго порядка, оператор Лапласа

Примерные практические задания к экзамену

1. Найти dz $\quad (3x+4y)^2 - x^3 - y^3$

2. Найти точки экстремума функций. $\quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - x + 2y + 5$

3. Вычислить

$$\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right) dxdy;$$

$$D:\ x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}.$$

4.Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$$

$$9z/2 = x^2 + y^2.$$

ОС-9.Экзамен (5 семестр)

Примерный перечень вопросов к экзамену

Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными

1. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений(ОДУ).
2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
3. ОДУ первого порядка - с разделяющимися переменными.
4. ОДУ первого порядка – однородные.
5. ОДУ первого порядка – линейные, Бернулли.
6. ОДУ первого порядка – в полных дифференциалах

7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка. Примеры.
8. Линейная независимость решений ДУ. Свойства решений ДУ. Фундаментальные системы решений. Определитель Вронского и его свойства. Теорема о структуре общего решения однородных линейных дифференциальных уравнений высшего порядка.
9. Однородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Однородное линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Вид общего решения. Примеры.
10. Неоднородное линейное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о виде общего решения. Вид частных решений в ряде специальных случаев.
11. Применение линейных дифференциальных уравнений в изучении колебательных явлений. Свободные колебания в среде без сопротивления.
12. Применение линейных дифференциальных уравнений в изучении колебательных явлений. Вынужденные колебания в среде без сопротивления.
13. Применение линейных дифференциальных уравнений в изучении колебательных явлений. Вынужденные колебания в среде с сопротивлением.
14. Системы линейных дифференциальных уравнений.
15. Элементы теории устойчивости.
16. Уравнения с частными производными: основные определения и понятия. Примеры.
17. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Метод Эйлера, метод Рунге- Кутты.

Элементы теории функций действительного переменного

18. Равномощные множества. Биекции и равномощность бесконечных множеств.
19. Понятие мощности множеств. Признаки равномощности множеств. Сравнение мощностей.
20. Счетные множества.
21. Множества мощности континуума. Существование множеств сколь угодно высокой мощности.

ОС-9.Экзамен (6 семестр)

Примерный перечень вопросов к экзамену

Элементы теории функций действительного переменного

1. Множества, измеримые по Лебегу на прямой, на плоскости.
2. Свойства меры Лебега. Множества нулевой меры Лебега.
3. Понятие измеримой числовой функции. Свойства измеримых функций.
4. Понятие интеграла Лебега от измеримой ограниченной функции.
5. Существование интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега.
6. Сравнение интегралов Римана и Лебега.
7. Интеграл Лебега от неограниченной функции.
8. Пространства $L_1[a;b]$ и $L_2[a;b]$.

Теория функций комплексного переменного

9. Множество комплексных чисел. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана и стереографическая проекция.
10. Функции комплексного аргумента: действительная и мнимая часть, предел, непрерывность, примеры.

11. Производная функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана дифференцируемости функции комплексной переменной. Определение аналитической функции.
12. Определение аналитической функции. Гармонические функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части.
13. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной. Конформные отображения.
14. Интеграл комплекснозначной функции комплексной переменной вдоль кривой: определение, сведение к криволинейному интегралу второго рода.
15. Интегральная теорема Коши для односвязной области, ее следствия.
16. Независимость интеграла аналитической функции от пути интегрирования. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница.
17. Интегральная теорема Коши для многосвязной области.
18. Интегральная формула Коши.
19. Экспонента в комплексной области и ее свойства.
20. Синус и косинус комплексного аргумента, их свойства. Формулы Эйлера.
21. Гиперболические функции в комплексной области. Связь между синусом и косинусом и гиперболическими функциями в комплексной плоскости.
22. Логарифмическая функция в комплексной области.
23. Определение степени с комплексным показателем. Степенная функция в комплексной области. Радикал, главная ветвь радикала. Показательная функция – как многозначная функция в комплексной плоскость.
24. Обратные тригонометрические функции в комплексной области.
25. Степенные ряды в комплексной области: область сходимости, радиус сходимости. Ряд Тейлора аналитической функции. Разложение аналитической функции в степенной ряд. Второе определение аналитической функции. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.
26. Ряды Лорана: область сходимости. Разложение функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана.
27. Изолированные особые точки аналитической функции. Лорановское разложение функции в окрестности изолированной особой точки. Классификация изолированных особых точек. Бесконечность как особая точка аналитической функции.
28. Вычеты аналитической функции. Теорема о вычетах. Теорема о полной сумме вычетов.
29. Вычисление вычетов аналитической функции в простых и кратных полюсах.
30. Применение вычетов к вычислению интегралов.

Примерные практические задания к экзамену

1. Выясните, какая линия задается на комплексной плоскости комплекснозначной функцией действительного аргумента. Изобразите линию. $z = t + it^2$, $-\infty < t < +\infty$.
2. Найдите и опишите образ $w = w(u, v)$ единичной окружности $|z| = 1$ при отображении $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
3. Найдите аналитическую функцию $f(z)$ по заданной мнимой части $v(x, y) = e^{-2y}\cos 2x$.
4. (1 балл) Найдите, в каких точках комплексной плоскости коэффициент растяжения отображения $w = z^2$ равен 1.
5. Найдите разложение функции $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}$ в ряд Лорана по степеням $z - 1$ в области $|z - 1| > 2$.

6. Вычислите $(-1)^i$ и представьте ответ в показательной форме.

7. Вычислите интеграл $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^3} dz$.

8. Найдите все изолированные особые точки функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ и установите их тип.

Критерии оценивания знаний обучающихся по дисциплине

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен, зачет
4семестр	Разбалловка по видам работ	12 х 1=12 баллов	20 х 1=20 баллов	272 балла	64 балла
	Суммарный макс. балл	12 баллов max	32 баллов max	336 баллов max	400 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам 4 семестра

Оценка	**Баллы (4 ЗЕ)**
«отлично»	361-400
«хорошо»	281-360
«удовлетворительно»	201-280
«неудовлетворительно»	200 и менее

Формирование балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся

		Посещение лекций	Посещение практических занятий	Работа на практических занятиях	Экзамен
5,6 семестр	Разбалловка по видам работ	9 х 1=9 баллов	15 х 1=15 баллов	212 баллов	64 балла
	Суммарный макс. балл	9 баллов max	24 балла max	236 баллов max	300 баллов max

Критерии оценивания работы обучающегося по итогам семестра

Оценка	**Баллы (3 ЗЕ)**
«отлично»	271-300
«хорошо»	211-270
«удовлетворительно»	151-210
«неудовлетворительно»	менее 150

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на лекционных и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с основной и дополнительной литературой.

Запись **лекции** – одна из форм активной самостоятельной работы обучающихся, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. В конце лекции преподаватель оставляет время (5 минут) для того, чтобы обучающиеся имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Из-за недостаточного количества аудиторных часов некоторые темы не удается осветить в полном объеме, поэтому преподаватель, по своему усмотрению, некоторые вопросы выносит на самостоятельную работу студентов, рекомендуя ту или иную литературу. Кроме этого, для лучшего освоения материала и систематизации знаний по дисциплине, необходимо постоянно разбирать материалы лекций по конспектам и учебным пособиям. В случае необходимости обращаться к преподавателю за консультацией.

Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студент должен изучить теоретический материал по теме занятия (использовать конспект лекций, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, при необходимости дополнить конспект, делая в нем соответствующие записи из литературных источников). В случае затруднений, возникающих при освоении теоретического материала, студенту следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале практического занятия преподаватель знакомит студентов с темой, оглашает план проведения занятия, выдает задания. В течение отведенного времени на выполнение работы студент может обратиться к преподавателю за консультацией или разъяснениями. В конце занятия проводится прием выполненных заданий, собеседование со студентом.

Результаты выполнения практических зданий оцениваются в баллах, в соответствии с балльно-рейтинговой системой университета.

Планы практических занятий

4 СЕМЕСТР

Занятие 1. План. Функции нескольких переменных. Область определения. График. Линии и поверхности уровня. Предел функции в точке. Непрерывность.

Занятие 2. План. Частные производные. Дифференцирование функции нескольких переменных. Полный дифференциал, связь с частными производными. Градиент, производная по направлению.

Занятие 3. План. Касательная и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных. Приложения дифференциала в приближенных вычислениях. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости результата дифференцирования от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, их инвариантность в случае замены переменных.

Занятие 4. План. Производные сложных функций. Неявные функции. Теорема существования и дифференцирования неявных функций. Вычисление производных неявных функций.

Занятие 5. План. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума.

Занятие 6. План. Условный экстремум функций нескольких переменных необходимый признак условного экстремума. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Достаточный признак условного экстремума.

Занятие 7. План. Решение задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции непрерывной в замкнутой, ограниченной области.

Занятие 8. План. Решение текстовых задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции непрерывной в замкнутой, ограниченной области. Построение математических моделей задач.

Занятие 9. Контрольная работа.

Занятие 10. План. Двойные интегралы, их свойства. Сведение двойного интеграла к повторному. Задачи на нахождение двойных интегралов в декартовых координатах.

Занятие 11. План. Задачи на нахождение тройных интегралов в декартовых координатах. Приложения кратных интегралов.

Занятие 12. Замена переменных в кратном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

Занятие 13. План. Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Тройной интеграл в сферических координатах.

Занятие 14. План. Геометрические приложения кратных интегралов. Физические приложения кратных интегралов.

Занятие 15. План. Задачи, приводящие к понятиям криволинейных интегралов первого рода. Определения криволинейных интегралов. Основные свойства и вычисление криволинейных интегралов первого рода. Приложения криволинейных интегралов первого рода.

Занятие 16. План. Задачи, приводящие к понятиям криволинейных интегралов второго рода. Основные свойства и вычисление криволинейных интегралов второго рода. Работа при движении материальной точки вдоль кривой. Формула Грина. Приложения криволинейных интегралов второго рода к нахождению площадей. Условия независимости криволинейных интегралов второго рода от пути интегрирования и их использование.

Занятие 17. План. Площадь поверхности, ее вычисление. Определение поверхностного интеграла первого рода, основные свойства и вычисление. Приложения поверхностных интегралов первого рода.

Занятие 18. План. Векторные поля. Векторные линии и векторные поверхности. Поток векторного поля. Теорема Остроградского. Дивергенция, инвариантное определение, физический смысл и вычисление. Соленоидальные поля. Основные свойства.

Занятие 19. План. Линейный интеграл поля. Циркуляция. Теорема Стокса. Ротор, инвариантное определение и физический смысл. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Потенциальные поля, условия потенциальности. Вычисление линейного интеграла в случае потенциального поля.

Занятие 20. План. Дифференциальные операторы первого и второго порядка, оператор Лапласа. Использование символических обозначений с ∇-оператором. Основные понятия тензорного исчисления.

5 СЕМЕСТР

Занятие 1. План. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Занятие 2. План. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Решение уравнений с разделяющимися переменными, однородные первого порядка.

Занятие 3. План. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Решение линейных уравнений первого порядка, уравнений Бернулли.

Занятие 4. Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Занятие 4. План. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Занятие 5. Решение однородных линейных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами.

Занятие 6. План. Решение неоднородных линейных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами.

Занятие 7. План. Решение неоднородных линейных уравнений высших порядков, метод вариации произвольной постоянной.

Занятие 8. Контрольная работа.

Занятие 9. План. Решение систем дифференциальных уравнений.

Занятие 10. План. Элементы теории устойчивости.

Занятие 11. План. Уравнения с частными производными: основные определения и понятия. Примеры.

Занятие 12. План. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Метод Эйлера, метод Рунге- Кутты.

Занятие 13 . План. Равномощные множества. Биекции и равномощность бесконечных множеств. Понятие мощности множеств. Признаки равномощности множеств. Сравнение мощностей.

Занятие 14. План. Счетные множества.

Занятие 15. План. Множества мощности континуума. Существование множеств сколь угодно высокой мощности.

6 СЕМЕСТР

Занятие 1. План. Множества, измеримые по Лебегу на прямой, на плоскости. Свойства меры Лебега. Множества нулевой меры Лебега.

Занятие 2. План. Понятие измеримой числовой функции. Свойства измеримых функций. Понятие интеграла Лебега от измеримой ограниченной функции.
Существование интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Пространства $L_1[a;b]$ и $L_2[a;b]$.

Занятие 3. План. Алгебраическая, показательная и тригонометрическая записи комплексного числа. Формула Эйлера. Действия с комплексными числами. Формула Муавра. Корень n-ой степени.

Занятие 4. Функции одной комплексной переменной. Действительная и мнимая части функции. Геометрическое место точек на комплексной плоскости. Кривые на комплексной плоскости. Образ точки и линии при комплексном отображении.

Занятие 5. План. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции, их связь. Свойства функций.

Занятие 6. План. Многозначные функции. Логарифмическая, степенная, показательная функции как многозначные функции. Обратные тригонометрические функции.

Занятие 7. План. Производная функции комплексной переменной. Аналитические функции. Условия Коши-Римана.

Занятие 8. Дифференцирование функций. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения односвязных областей. Гармонические функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части.

Занятие 9. План. Интеграл от функции комплексной переменной. Решение задач.

Занятие 10. План. Теорема Коши. Первообразная функции комплексной переменной. Интеграл Коши и интегральная формула Коши.

Занятие 11. План. Степенные ряды. Аналитические функции и их разложения в степенные ряды. Область сходимости. Ряд Лорана. Область сходимости.

Занятие12. Разложение функций в ряд Лорана.

Занятие 13. План. Изолированные особые точки аналитических функций и их классификация. Изучение аналитических функций в окрестности бесконечно удаленной точки.

Занятие14. План. Вычеты. Основная теорема о вычетах. Применение вычетов к вычислению интегралов.

Занятие 15. Применение теории вычетов к вычислению определенных и несобственных интегралов.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, Интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

Основная литература

1. Сборник задач по математическому анализу : учебное пособие : в 3 т . Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 496 с. - ISBN 978-5-9221-0306-0. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1223515
2. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды: Учебник / Кудрявцев Л.Д., - 4-е изд. - Москва :ФИЗМАТЛИТ, 2015. - 444 с.: ISBN 978-5-9221-1585-8. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/854332

Дополнительная литература

3. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебное пособие : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринский. – 8-е изд., испр. и доп. – Москва : Физматлит, 2001. – Том 1. – 680 с. – ISBN 978-5-9221-0156-0. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83037
4. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебное пособие / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринский. – 8-е изд. – Москва : Физматлит, 2001. – Том 2. – 861 с. – ISBN 978-5-9221-0157-8. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83038
5. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебное пособие : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринский. – Изд. 6-е. (1-е изд. - 1949 г.). – Москва : Физматлит, 2002. – Том 3. – 727 с. – ISBN 5-9221-0155-2. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83196

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Интернет-ресурсы

1. Мир математических уравнений. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm
2. Softline. http://exponenta.ru/
3. Популярные лекции по математике. http://ilib.mccme.ru/plm
4. Школьникам, студентам, аспирантам. http://ph4s.ru/
5. Прикладная математика. http://primat.org
6. Учебно-методическая литература для студентов. http://studfiles.ru/
7. МГТУ ГА. http://vm.mstuca.ru/posobia/posobia.htm
8. Единое окно доступа к образовательным ресурсам. http://window.edu.ru/

Лист согласования рабочей программы
учебной дисциплины (практики)

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование, 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки).

Рабочая программа Математический анализ

Составители: А.Р. Сибирева – Ульяновск: УлГПУ, 2024.

Программа составлена с учетом федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утверждённого Министерством образования и науки Российской Федерации, и в соответствии с учебным планом.

Составители ______ А.Р.Сибирева
(подпись)

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) одобрена на заседании кафедры высшей математики "23" апреля 2024г., протокол № 8

Заведующий кафедрой

______ Столярова И.В. 23.04.24
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Рабочая программа учебной дисциплины (практики) согласована с библиотекой

Сотрудник библиотеки

______ Марсакова Ю.Б. 04.04.24г.
личная подпись *расшифровка подписи* *дата*

Программа рассмотрена и одобрена на заседании ученого совета факультета физико-математического и технологического образования "15" мая 2024 г., протокол № 6

И.о. декана факультета физико-математического и технологического образования

______ Череватенко О.И.